

PR 6
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA
Topik: Teknik Integrasi & Aplikasi Integral

Topik 1: Teknik Integrasi Kombinasi (Substitusi, Parsial, Trigonometri) (15 Poin)

Soal 1.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Solusi Soal 1.1

Gunakan substitusi aljabar awal, misalkan:

$$u = x^2 \implies du = 2x dx \implies x dx = \frac{1}{2} du$$

Substitusikan ke dalam integral:

$$I = \int \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} (x dx) = \frac{1}{2} \int \frac{u e^u}{(u + 1)^2} du$$

Selanjutnya, selesaikan $\int \frac{u e^u}{(u+1)^2} du$ menggunakan pengintegralan parsial:

$$\begin{aligned} v = u e^u &\implies dv = (e^u + u e^u) du = e^u (u + 1) du \\ dw = \frac{1}{(u + 1)^2} du &\implies w = -\frac{1}{u + 1} \end{aligned}$$

Terapkan rumus pengintegralan parsial $\int v dw = vw - \int w dv$:

$$\begin{aligned} \int \frac{u e^u}{(u + 1)^2} du &= -\frac{u e^u}{u + 1} - \int \left(-\frac{1}{u + 1}\right) e^u (u + 1) du \\ &= -\frac{u e^u}{u + 1} + \int e^u du \\ &= -\frac{u e^u}{u + 1} + e^u + C \\ &= e^u \left(1 - \frac{u}{u + 1}\right) + C \\ &= \frac{e^u}{u + 1} + C \end{aligned}$$

Substitusikan kembali $u = x^2$:

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{x^2}}{x^2 + 1} \right) + C = \boxed{\frac{e^{x^2}}{2(x^2 + 1)} + C}$$

Soal 1.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

Solusi Soal 1.2

Ubah bentuk penyebut menggunakan manipulasi identitas trigonometri:

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2 \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)\end{aligned}$$

Maka integral dapat ditulis sebagai:

$$I = \int \frac{\sin(2x)}{1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)} dx = \int \frac{2 \sin(2x)}{2 - \sin^2(2x)} dx$$

Gunakan identitas trigonometri $\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x)$:

$$I = \int \frac{2 \sin(2x)}{2 - (1 - \cos^2(2x))} dx = \int \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos^2(2x)} dx$$

Misalkan $u = \cos(2x) \implies du = -2 \sin(2x) dx \implies 2 \sin(2x) dx = -du$. Substitusikan ke dalam integral:

$$I = \int \frac{-du}{1 + u^2} = -\arctan(u) + C$$

Kembalikan nilai $u = \cos(2x)$:

$$I = \boxed{-\arctan(\cos(2x)) + C}$$

Soal 1.3. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$$

Solusi Soal 1.3

Gunakan substitusi trigonometri $x = \tan \theta \implies dx = \sec^2 \theta d\theta$. Maka $\sqrt{1 + x^2} = \sec \theta$, sehingga $(1 + x^2)^{3/2} = \sec^3 \theta$ dan $\theta = \arctan x$. Substitusikan seluruh variabel ke dalam integral:

$$I = \int \frac{\tan \theta \cdot e^\theta \cdot \sec^2 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta = \int e^\theta \frac{\tan \theta}{\sec \theta} d\theta = \int e^\theta \sin \theta d\theta$$

Gunakan pengintegralan parsial siklik untuk $J = \int e^\theta \sin \theta d\theta$:

$$\begin{aligned}J &= -e^\theta \cos \theta - \int (-e^\theta \cos \theta) d\theta \\ &= -e^\theta \cos \theta + \left(e^\theta \sin \theta - \int e^\theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= e^\theta (\sin \theta - \cos \theta) - J\end{aligned}$$

Sehingga:

$$2J = e^{\theta}(\sin \theta - \cos \theta) \implies J = \frac{e^{\theta}(\sin \theta - \cos \theta)}{2} + C$$

Dari hubungan $x = \tan \theta$, diperoleh $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dan $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Substitusikan kembali nilai-nilai ini:

$$I = \frac{e^{\arctan x}}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C = \boxed{\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C}$$

Topik 2: Integral Substitusi Trigonometri (Pythagoras)

(10 Poin)

Soal 2.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+2x+5)^{3/2}} dx$$

Solusi Soal 2.1

Lengkapi kuadrat sempurna pada penyebut:

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$$

Misalkan $u = x+1 \implies du = dx$ dan $x+5 = u+4$. Integral menjadi:

$$I = \int \frac{u+4}{(u^2+4)^{3/2}} du = \int \frac{u}{(u^2+4)^{3/2}} du + 4 \int \frac{du}{(u^2+4)^{3/2}}$$

Selesaikan masing-masing bentuk integral:

1. Untuk bagian pertama, gunakan substitusi $w = u^2 + 4 \implies dw = 2u du$:

$$\int \frac{u}{(u^2+4)^{3/2}} du = \frac{1}{2} \int w^{-3/2} dw = -w^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}$$

2. Untuk bagian kedua, gunakan substitusi trigonometri $u = 2 \tan \theta \implies du = 2 \sec^2 \theta d\theta$:

$$\sqrt{u^2+4} = 2 \sec \theta \implies (u^2+4)^{3/2} = 8 \sec^3 \theta$$

$$4 \int \frac{du}{(u^2+4)^{3/2}} = 4 \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{8 \sec^3 \theta} = \int \cos \theta d\theta = \sin \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}$$

Gabungkan kedua hasil tersebut:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{u^2+4}} + \frac{u}{\sqrt{u^2+4}} + C = \frac{u-1}{\sqrt{u^2+4}} + C$$

Substitusikan kembali $u = x+1$:

$$I = \frac{(x+1)-1}{\sqrt{(x+1)^2+4}} + C = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C}$$

Soal 2.2. Hitunglah nilai integral tentu berikut:

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx$$

Solusi Soal 2.2

Gunakan substitusi trigonometri $x = \sec \theta \implies dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$. Maka $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \tan \theta$.

Tentukan batas integrasi baru untuk θ :

- Saat $x = \sqrt{2} \implies \sec \theta = \sqrt{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$
- Saat $x = 2 \implies \sec \theta = 2 \implies \theta = \frac{\pi}{3}$

Substitusikan seluruhnya ke dalam integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan \theta \cdot (\sec \theta \tan \theta d\theta)}{\sec^3 \theta} \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin(2\pi/3)}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sin(\pi/2)}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{4\pi - 3\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{24}} \end{aligned}$$

Topik 3: Dekomposisi Pecahan Rasional

(10 Poin)

Soal 3.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 9x} dx$$

Solusi Soal 3.1

Karena derajat pembilang (4) lebih besar dari derajat penyebut (3), lakukan pembagian suku banyak (porogapit) terlebih dahulu.

$$x^4 + 1 = x(x^3 + 9x) - 9x^2 + 1$$

Sehingga fungsi rasional tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 + 9x} = x + \frac{-9x^2 + 1}{x(x^2 + 9)}$$

Lakukan dekomposisi pecahan rasional pada bagian sisa pembagian. Karena terdapat faktor linear dan faktor kuadrat tak teruraikan, bentuknya adalah:

$$\frac{-9x^2 + 1}{x(x^2 + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}$$

Kalikan kedua ruas dengan $x(x^2 + 9)$:

$$\begin{aligned} -9x^2 + 1 &= A(x^2 + 9) + x(Bx + C) \\ -9x^2 + 1 &= (A + B)x^2 + Cx + 9A \end{aligned}$$

Samakan koefisien di kedua ruas:

- Konstanta: $9A = 1 \implies A = \frac{1}{9}$
- Koefisien x : $C = 0$
- Koefisien x^2 : $A + B = -9 \implies \frac{1}{9} + B = -9 \implies B = -\frac{82}{9}$

Substitusikan konstanta ke dalam bentuk integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(x + \frac{1/9}{x} - \frac{82/9 \cdot x}{x^2 + 9} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{82}{9} \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + C \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{9} \ln|x| - \frac{41}{9} \ln(x^2 + 9) + C} \end{aligned}$$

Soal 3.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^3 - 2x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

Solusi Soal 3.2

Penyebut terdiri dari dua faktor kuadrat tak teruraikan $(x^2 + 1)$ dan $(x^2 + 4)$. Susun dekomposisi pecahan rasional sebagai berikut:

$$\frac{x^3 - 2x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Kalikan kedua ruas dengan $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$:

$$x^3 - 2x + 4 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

Kelompokkan berdasarkan koefisien pangkat x :

$$x^3 - 2x + 4 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (4A + C)x + (4B + D)$$

Samakan koefisien di kedua ruas untuk membentuk sistem persamaan linear:

$$1) A + C = 1$$

$$2) B + D = 0 \implies D = -B$$

$$3) 4A + C = -2$$

$$4) 4B + D = 4$$

Dari persamaan (3) dikurangi persamaan (1):

$$(4A + C) - (A + C) = -2 - 1 \implies 3A = -3 \implies A = -1$$

Sehingga $C = 1 - (-1) = 2$.

Substitusikan $D = -B$ ke dalam persamaan (4):

$$4B - B = 4 \implies 3B = 4 \implies B = \frac{4}{3}, \quad D = -\frac{4}{3}$$

Substitusikan konstanta ke dalam bentuk integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{-x + 4/3}{x^2 + 1} + \frac{2x - 4/3}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx - \frac{4}{3} \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{4}{3} \arctan(x) + \ln(x^2 + 4) - \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + \frac{4}{3} \arctan(x) - \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C} \end{aligned}$$

Topik 4: Persamaan Diferensial Terpisah (Separable ODE)

(10 Poin)

Soal 4.1. Sebuah tangki penampungan awalnya berisi 100 liter air murni. Larutan garam dengan konsentrasi 0.5 kg/liter dialirkan masuk ke dalam tangki dengan laju konstan 4 liter/menit. Campuran di dalam tangki senantiasa diaduk hingga merata dan dialirkan keluar tangki dengan laju yang sama, yaitu 4 liter/menit.

- Formulasikan dan selesaikan masalah nilai awal (IVP) untuk menentukan massa garam $y(t)$ (dalam kg) di dalam tangki pada saat t menit.
- Hitung waktu t yang dibutuhkan agar massa garam di dalam tangki mencapai 25 kg.
- Tentukan batas massa garam saat waktu berjalan sangat lama ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$).

Solusi Soal 4.1

- Laju perubahan massa garam $\frac{dy}{dt}$ adalah selisih antara laju masuk (R_{in}) dan laju keluar (R_{out}):

$$R_{\text{in}} = 4 \text{ liter/menit} \times 0.5 \text{ kg/liter} = 2 \text{ kg/menit}$$

$$R_{\text{out}} = 4 \text{ liter/menit} \times \frac{y(t)}{100} \text{ kg/liter} = \frac{y(t)}{25} \text{ kg/menit}$$

Persamaan diferensialnya adalah:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{y}{25} = \frac{50 - y}{25}$$

Pisahkan variabel y dan t :

$$\frac{dy}{50 - y} = \frac{dt}{25}$$

Integralkan kedua ruas:

$$-\ln|50 - y| = \frac{t}{25} + C_1 \implies 50 - y = Ce^{-t/25} \implies y(t) = 50 - Ce^{-t/25}$$

Gunakan syarat awal $y(0) = 0$ (air murni):

$$0 = 50 - Ce^0 \implies C = 50$$

Sehingga solusi khusus untuk massa garam adalah:

$$y(t) = 50 \left(1 - e^{-t/25}\right) \text{ kg}$$

b) Substitusikan $y(t) = 25$ kg:

$$\begin{aligned} 25 &= 50 \left(1 - e^{-t/25}\right) \\ \frac{1}{2} &= 1 - e^{-t/25} \implies e^{-t/25} = \frac{1}{2} \\ -\frac{t}{25} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \\ t &= 25 \ln 2 \text{ menit} \approx 17.33 \text{ menit} \end{aligned}$$

c) Batas massa garam saat $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 50 \left(1 - e^{-t/25}\right) = 50(1 - 0) = 50 \text{ kg}$$

Soal 4.2. Sebuah model *machine learning* sedang menjalani proses pelatihan yang tampaknya sederhana, tetapi perilaku *loss*-nya cukup drama. Misalkan $L(t)$ menyatakan *training loss* pada waktu t (dalam jam). Karena proses optimisasi semakin lambat ketika *loss* makin kecil, laju penurunan *loss* dimodelkan oleh persamaan berikut.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2}L \left(1 - \frac{L}{8}\right) \left(1 + \frac{L}{8}\right)$$

Pada awal pelatihan, model memiliki *training loss* awal sebesar 6. Bantu Abid, sang penjaga GPU, menyelidiki perilaku model tersebut dengan menjawab pertanyaan berikut.

a) Formulasikan permasalahan nilai awal (IVP) yang sesuai, lalu selesaikan untuk memperoleh fungsi $L(t)$.

- b) Apabila durasi waktu yang dibutuhkan agar *training loss* turun hingga bernilai 2 dapat dinyatakan dalam bentuk paling sederhana, yaitu $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, tentukan nilai dari $a + b$.
- c) Sukirman membuat klaim bahwa jika pelatihan terus dilanjutkan, *training loss* akan semakin mendekati nol. Bantu Abid untuk membuktikan klaim dari Sukirman! Anda dapat membuktikannya dengan menganalisis perilaku $L(t)$ saat $t \rightarrow \infty$.

Solusi Soal 4.2

Diketahui

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2}L \left(1 - \frac{L}{8}\right) \left(1 + \frac{L}{8}\right), \quad L(0) = 6.$$

a) **Menentukan solusi IVP**

Perhatikan bahwa

$$\left(1 - \frac{L}{8}\right) \left(1 + \frac{L}{8}\right) = 1 - \frac{L^2}{64}.$$

Maka persamaan diferensial menjadi

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2}L \left(1 - \frac{L^2}{64}\right) = -\frac{L(64 - L^2)}{128}.$$

Dengan demikian, persamaan dapat dipisahkan sebagai

$$\frac{128 dL}{L(64 - L^2)} = -dt.$$

Selanjutnya, lakukan pecahan parsial:

$$\frac{128}{L(64 - L^2)} = \frac{128}{L(8 - L)(8 + L)} = \frac{2}{L} + \frac{1}{8 - L} - \frac{1}{8 + L}.$$

Oleh karena itu,

$$\int \left(\frac{2}{L} + \frac{1}{8 - L} - \frac{1}{8 + L} \right) dL = - \int dt.$$

Mengintegrasikan kedua ruas diperoleh

$$2 \ln |L| - \ln |8 - L| - \ln |8 + L| = -t + C.$$

Bentuk tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\ln \left(\frac{L^2}{64 - L^2} \right) = -t + C,$$

sehingga

$$\frac{L^2}{64 - L^2} = Ce^{-t}.$$

Gunakan syarat awal $L(0) = 6$:

$$\frac{6^2}{64 - 6^2} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{28} = C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{9}{7}.$$

Maka

$$\frac{L^2}{64 - L^2} = \frac{9}{7}e^{-t}.$$

Selanjutnya,

$$7L^2 = 9e^{-t}(64 - L^2),$$

sehingga

$$(7 + 9e^{-t})L^2 = 576e^{-t}.$$

Karena $L(0) = 6 > 0$, maka dipilih akar positif:

$$L(t) = \frac{24e^{-t/2}}{\sqrt{7 + 9e^{-t}}}$$

atau secara ekuivalen

$$L(t) = \frac{24}{\sqrt{7e^t + 9}}.$$

b) **Menentukan waktu saat $L(t) = 2$**

Gunakan bentuk

$$L(t) = \frac{24}{\sqrt{7e^t + 9}}.$$

Jika $L(t) = 2$, maka

$$2 = \frac{24}{\sqrt{7e^t + 9}}$$

sehingga

$$\sqrt{7e^t + 9} = 12.$$

Kuadratkan kedua ruas:

$$7e^t + 9 = 144$$

$$7e^t = 135$$

$$e^t = \frac{135}{7}.$$

sehingga

$$t = \ln\left(\frac{135}{7}\right) \text{ jam}$$

Jadi, $a = 135$ dan $b = 7$, serta:

$$a + b = \boxed{142}.$$

c) **Menentukan limit saat $t \rightarrow \infty$**

Dari solusi eksplisit,

$$L(t) = \frac{24}{\sqrt{7e^t + 9}}.$$

Karena $e^t \rightarrow \infty$ saat $t \rightarrow \infty$, maka

$$7e^t + 9 \rightarrow \infty.$$

Akibatnya,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24}{\sqrt{7e^t + 9}} = 0.$$

Dengan demikian,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa apabila pelatihan terus dilanjutkan, maka *training loss* akan semakin kecil dan mendekati nol.

Topik 5: Aplikasi Integral: Luas Daerah**(20 Poin)**

Soal 5.1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 3x$ dan garis $y = x$.

Solusi Soal 5.1

Langkah 1: Tentukan titik potong kedua kurva

$$\begin{aligned}x^3 - 3x &= x \\x^3 - 4x &= 0 \\x(x-2)(x+2) &= 0\end{aligned}$$

Diperoleh tiga titik potong di $x = -2$, $x = 0$, dan $x = 2$.

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah (L)

- Pada interval $[-2, 0]$, kurva $y = x^3 - 3x$ berada di atas garis $y = x$.
- Pada interval $[0, 2]$, garis $y = x$ berada di atas kurva $y = x^3 - 3x$.

Karena kedua fungsi bersifat ganjil, daerah pada kedua interval tersebut simetris:

$$\begin{aligned}L &= 2 \int_0^2 (x - (x^3 - 3x)) \, dx \\&= 2 \int_0^2 (4x - x^3) \, dx \\&= 2 \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\&= 2 \left(2(4) - \frac{16}{4} \right) = 2(8 - 4) = \boxed{8 \text{ satuan luas}}\end{aligned}$$

Soal 5.2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabola $x = y^2 - 4y$ dan garis $x = 2y - y^2$.

Solusi Soal 5.2

Langkah 1: Tentukan titik potong kedua kurva

$$\begin{aligned}y^2 - 4y &= 2y - y^2 \\2y^2 - 6y &= 0 \\2y(y-3) &= 0\end{aligned}$$

Diperoleh titik potong di $y = 0$ dan $y = 3$.

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah (L) Pada interval $y \in [0, 3]$, kurva $x = 2y - y^2$ berada lebih kanan (bernilai lebih besar) dibanding $x = y^2 - 4y$. Integralkan terhadap variabel y :

$$\begin{aligned}L &= \int_0^3 ((2y - y^2) - (y^2 - 4y)) \, dy \\&= \int_0^3 (6y - 2y^2) \, dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[3y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^3 \\
&= \left(3(9) - \frac{2}{3}(27) \right) - 0 = 27 - 18 = \boxed{9 \text{ satuan luas}}
\end{aligned}$$

Soal 5.3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = e^x$, $y = e^{-x}$, dan garis $x = \ln 3$.

Solusi Soal 5.3

Langkah 1: Tentukan titik potong kurva $y = e^x$ dan $y = e^{-x}$

$$e^x = e^{-x} \implies e^{2x} = 1 \implies x = 0$$

Langkah 2: Menghitung Luas Daerah (L) Pada interval $[0, \ln 3]$, $e^x \geq e^{-x}$. Maka:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\ln 3} (e^x - e^{-x}) dx \\
&= \left[e^x + e^{-x} \right]_0^{\ln 3} \\
&= (e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}) - (e^0 + e^0) \\
&= \left(3 + \frac{1}{3} \right) - (1 + 1) = \frac{10}{3} - 2 = \boxed{\frac{4}{3} \text{ satuan luas}}
\end{aligned}$$

Soal 5.4. Daerah R dibatasi oleh parabola $y = 9 - x^2$ dan sumbu- x . Tentukan nilai konstanta c sedemikian rupa sehingga garis horizontal $y = c$ membagi daerah R menjadi dua bagian daerah yang memiliki luas yang persis sama.

Solusi Soal 5.4

Langkah 1: Tentukan luas total daerah R Parabola memotong sumbu- x ($y = 0$) di $x = -3$ dan $x = 3$.

$$L_{\text{total}} = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 2 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 2 \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 2(27 - 9) = 36$$

Setengah dari luas total adalah $\frac{36}{2} = 18$.

Langkah 2: Hitung luas daerah bagian atas Daerah bagian atas dibatasi di bawah oleh $y = c$ dan di atas oleh $y = 9 - x^2$. Titik potong kedua kurva adalah $9 - x^2 = c \implies x = \pm\sqrt{9-c}$.

$$\begin{aligned}
L_{\text{atas}} &= \int_{-\sqrt{9-c}}^{\sqrt{9-c}} ((9 - x^2) - c) dx \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{9-c}} (9 - c - x^2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[(9-c)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{9-c}} \\
&= 2 \left((9-c)^{3/2} - \frac{(9-c)^{3/2}}{3} \right) = \frac{4}{3}(9-c)^{3/2}
\end{aligned}$$

Langkah 3: Tentukan nilai c Samakan $L_{\text{atas}} = 18$:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}(9-c)^{3/2} = 18 &\implies (9-c)^{3/2} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2} \\
&\implies 9-c = \left(\frac{27}{2}\right)^{2/3} = \frac{9}{2^{2/3}} = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \\
&\implies c = \boxed{9 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)}
\end{aligned}$$

Topik 6: Aplikasi Integral: Volume Benda Putar & Penampang Lintang (20 Poin)

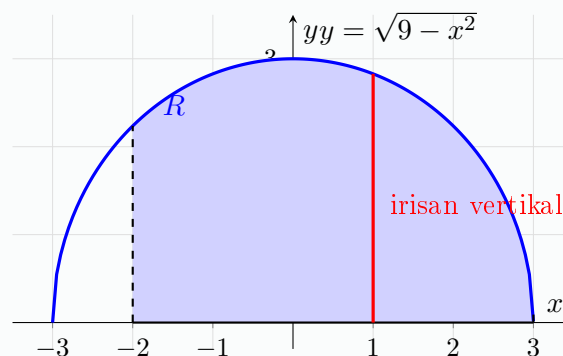
Soal 6.1. Sketsalah daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{9-x^2}$, garis $y = 0$, serta garis $x = -2$ dan $x = 3$. Tunjukkan irisan vertikal tipikal, lalu tentukan volume benda pejal yang terbentuk jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- x .

Solusi Soal 6.1

Langkah 1: Sketsa daerah dan metode Daerah R berada di bawah kurva setengah lingkaran atas

$$y = \sqrt{9-x^2}$$

dan di atas sumbu- x , untuk $-2 \leq x \leq 3$.



Jika sebuah irisan vertikal tipikal diputar mengelilingi sumbu- x , irisan tersebut membentuk cakram dengan jari-jari

$$R(x) = \sqrt{9-x^2}.$$

Karena tidak ada lubang di bagian tengah cakram, kita gunakan **Metode Cakram (Disk Method)**.

Langkah 2: Menghitung Volume (V)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-2}^3 [R(x)]^2 dx \\
&= \pi \int_{-2}^3 \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-2}^3 (9-x^2) dx \\
&= \pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^3 \\
&= \pi \left[\left(27 - \frac{27}{3}\right) - \left(-18 - \frac{(-2)^3}{3}\right) \right] \\
&= \pi \left[18 - \left(-18 + \frac{8}{3}\right) \right] \\
&= \pi \left(\frac{100}{3} \right) = \boxed{\frac{100\pi}{3} \text{ satuan volume}}.
\end{aligned}$$

Soal 6.2. Tentukan volume benda pejal yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabola $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu- y .

Solusi Soal 6.2

Langkah 1: Titik potong dan metode Titik potong kedua kurva diperoleh dari:

$$4x = 4x^2 \implies x = x^2 \implies x(x-1) = 0.$$

Maka titik potongnya terjadi saat $x = 0$ dan $x = 1$, sehingga nilai y yang bersesuaian adalah $y = 0$ dan $y = 4$.

Karena daerah diputar mengelilingi sumbu- y , gunakan irisan horizontal dan nyatakan x sebagai fungsi dari y :

$$y = 4x \implies x = \frac{y}{4}, \quad y = 4x^2 \implies x = \frac{\sqrt{y}}{2}.$$

Pada $0 \leq y \leq 4$, batas kanan daerah adalah $x = \frac{\sqrt{y}}{2}$ dan batas kirinya adalah $x = \frac{y}{4}$. Maka:

$$R(y) = \frac{\sqrt{y}}{2}, \quad r(y) = \frac{y}{4}.$$

Langkah 2: Menghitung Volume (V)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 \left([R(y)]^2 - [r(y)]^2\right) dy \\
&= \pi \int_0^4 \left[\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2\right] dy \\
&= \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{4} - \frac{y^2}{16}\right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[\frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{48} \right]_0^4 \\
&= \pi \left(2 - \frac{4}{3} \right) = \boxed{\frac{2\pi}{3} \text{ satuan volume}}.
\end{aligned}$$

Soal 6.3. Alas suatu benda pejal adalah daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Setiap penampang lintang benda pejal yang dipotong oleh bidang tegak lurus sumbu- x berbentuk persegi. Tentukan volume benda pejal tersebut.

Solusi Soal 6.3

Langkah 1: Menentukan luas penampang lintang Dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$, diperoleh:

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Untuk setiap nilai x , panjang sisi persegi sama dengan panjang tali busur vertikal pada lingkaran:

$$s(x) = \sqrt{4 - x^2} - (-\sqrt{4 - x^2}) = 2\sqrt{4 - x^2}.$$

Karena penampang lintangnya berbentuk persegi, luas penampangnya adalah:

$$A(x) = [s(x)]^2 = \left(2\sqrt{4 - x^2} \right)^2 = 4(4 - x^2).$$

Langkah 2: Menghitung Volume (V)

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^2 A(x) \, dx \\
&= \int_{-2}^2 4(4 - x^2) \, dx \\
&= 4 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\
&= 4 \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= 4 \left(\frac{32}{3} \right) = \boxed{\frac{128}{3} \text{ satuan volume}}.
\end{aligned}$$

Topik 7: Aplikasi Integral: Panjang Kurva

(10 Poin)

Soal 7.1. Hitunglah panjang kurva $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ pada interval $x \in [1, 2]$.

Solusi Soal 7.1

Rumus panjang kurva adalah $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx$.

Langkah 1: Hitung turunan pertama

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{8} + \frac{1}{4}x^{-2} \right) = \frac{4x^3}{8} - \frac{2}{4}x^{-3} = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}$$

Langkah 2: Sederhanakan bentuk di bawah tanda akar

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 &= 1 + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3} \right)^2 \\ &= 1 + \left(\frac{x^6}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6} \right) \\ &= \frac{x^6}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6} = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3} \right)^2 \end{aligned}$$

Sehingga $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}$ (bernilai positif pada $[1, 2]$).

Langkah 3: Hitung panjang kurva (S)

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{1}{4x^2} \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{16}{8} - \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{16} \right) - \left(-\frac{1}{8} \right) = \frac{31}{16} + \frac{2}{16} = \boxed{\frac{33}{16} \text{ satuan panjang}} \end{aligned}$$

Soal 7.2. Hitunglah panjang kurva transenden $y = \ln(\sec x)$ dari $x = 0$ hingga $x = \frac{\pi}{3}$.

Solusi Soal 7.2

Langkah 1: Hitung turunan pertama

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x \tan x) = \tan x$$

Langkah 2: Sederhanakan bentuk di bawah tanda akar

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

Pada interval $[0, \frac{\pi}{3}]$, nilai $\sec x > 0$, sehingga $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sec x$.

Langkah 3: Hitung panjang kurva (S)

$$S = \int_0^{\pi/3} \sec x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= [\ln |\sec x + \tan x|]_0^{\pi/3} \\
&= \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) \right| - \ln |\sec(0) + \tan(0)| \\
&= \ln (2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + 0) = \boxed{\ln (2 + \sqrt{3}) \text{ satuan panjang}}
\end{aligned}$$

Topik 8: Aplikasi Integral: Luas Permukaan Benda Putar**(10 Poin)**

Soal 8.1. Kurva $y = \sqrt{4 - x^2}$ pada interval $x \in [-1, 1]$ diputar mengelilingi sumbu- x . Hitung luas permukaan benda putar yang dihasilkan.

Solusi Soal 8.1

Rumus luas permukaan rotasi terhadap sumbu- x adalah $A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

Langkah 1: Hitung turunan pertama dan diferensial panjang busur ds

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \\
1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{(4 - x^2) + x^2}{4 - x^2} = \frac{4}{4 - x^2} \\
\Rightarrow ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx
\end{aligned}$$

Langkah 2: Menghitung Luas Permukaan (A)

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{-1}^1 y ds \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 2 dx \\
&= 2\pi [2x]_{-1}^1 = 2\pi(2 - (-2)) = \boxed{8\pi \text{ satuan luas}}
\end{aligned}$$

Soal 8.2. Kurva $y = \frac{x^3}{3}$ pada interval $x \in [0, 1]$ diputar mengelilingi sumbu- y . Hitung luas permukaan benda putar yang dihasilkan.

Solusi Soal 8.2

Rumus luas permukaan rotasi terhadap sumbu- y untuk fungsi dalam x adalah $A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

Langkah 1: Hitung turunan pertama dan diferensial panjang busur ds

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \implies 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^4 \implies ds = \sqrt{1 + x^4} dx$$

Langkah 2: Menghitung Luas Permukaan (A)

$$A = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + x^4} dx$$

Gunakan substitusi $u = x^2 \implies du = 2x dx \implies x dx = \frac{1}{2} du$. Batas integrasi: saat $x = 0 \implies u = 0$; saat $x = 1 \implies u = 1$.

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} \left(\frac{1}{2} du\right) = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du$$

Gunakan rumus integral baku $\int \sqrt{1 + u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2})$:

$$\begin{aligned} A &= \pi \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\left[\frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] - [0 + 0] \right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$