

PR 6
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA

Topik: Teknik Integrasi & Aplikasi Integral

Dikumpul: Kamis, 30 Juli 2026, Jam 19:30 WIB (Sebelum Kuis 6)

Petunjuk Umum Pengerjaan PR:

1. **Penggunaan Perangkat Kecerdasan Buatan (AI):** Penggunaan peralatan berbasis Kecerdasan Buatan (Artificial Intelligence/AI) **diperbolehkan hanya sebagai sarana bantu belajar**. Kendati demikian, setiap mahasiswa **bertanggung jawab penuh secara akademis** untuk memahami isi, alur logika, dan kebenaran matematis dari jawaban yang dituliskan.
2. **Langkah Pengerjaan:** Tuliskan seluruh langkah penyelesaian soal secara **jelas, runtut, dan lengkap**. Jawaban akhir tanpa disertai argumen atau langkah matematis yang memadai **tidak akan mendapatkan nilai penuh**. **Mahasiswa wajib memberikan kotak atau highlight (stabilo) pada jawaban akhir dari setiap nomor.**
3. **Pengumpulan Berkas:** Jawaban **wajib berupa tulisan tangan secara rapi** (baik ditulis fisik di atas kertas A4 lalu dipindai/scan, maupun ditulis secara digital menggunakan tablet/stylus). Hasil pekerjaan harus disimpan sebagai **satu berkas PDF tunggal yang jelas dan terbaca**, kemudian diunggah melalui platform **SCELE** sebelum tenggat waktu yang ditentukan. Format penamaan berkas yang dikumpulkan adalah **KODEASDOS_NamaLengkap_NPM_PR6.pdf** (contoh: **RSA_GeoffreyHinton_2501233211_PR6.pdf**).
4. **Konsekuensi Keterlambatan:** Batas waktu pengumpulan berkas di SCELE bersifat **mutlak**. Keterlambatan pengumpulan akan dikenai penalti pengurangan nilai sebesar **10% per jam keterlambatan** dari nilai total yang diperoleh.
5. **Integritas Akademik:** Junjung tinggi nilai kejujuran. Segala bentuk kecurangan akademik, plagiarisme, maupun kerja sama tidak sah antar-mahasiswa akan berakibat pada pemberian **nilai nol (0) secara langsung** untuk tugas ini.

Topik 1: Teknik Integrasi Kombinasi (Substitusi, Parsial, Trigonometri) (15 Poin)

Soal 1.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Soal 1.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

Soal 1.3. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

Topik 2: Integral Substitusi Trigonometri (Pythagoras)

(10 Poin)

Soal 2.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+2x+5)^{3/2}} dx$$

Soal 2.2. Hitunglah nilai integral tentu berikut:

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} dx$$

Topik 3: Dekomposisi Pecahan Rasional

(10 Poin)

Soal 3.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+9x} dx$$

Soal 3.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{x^3-2x+4}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

Topik 4: Persamaan Diferensial Terpisah (Separable ODE)

(10 Poin)

Soal 4.1. Sebuah tangki penampungan awalnya berisi 100 liter air murni. Larutan garam dengan konsentrasi 0.5 kg/liter dialirkan masuk ke dalam tangki dengan laju konstan 4 liter/menit. Campuran di dalam tangki senantiasa diaduk hingga merata dan dialirkan keluar tangki dengan laju yang sama, yaitu 4 liter/menit.

- Formulasikan dan selesaikan masalah nilai awal (IVP) untuk menentukan massa garam $y(t)$ (dalam kg) di dalam tangki pada saat t menit.
- Hitung waktu t yang dibutuhkan agar massa garam di dalam tangki mencapai 25 kg.
- Tentukan batas massa garam saat waktu berjalan sangat lama ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$).

Soal 4.2. Sebuah model *machine learning* sedang menjalani proses pelatihan yang tampaknya sederhana, tetapi perilaku *loss*-nya cukup drama. Misalkan $L(t)$ menyatakan *training loss* pada waktu t (dalam jam). Karena proses optimisasi semakin lambat ketika *loss* makin kecil, laju penurunan *loss* dimodelkan oleh persamaan berikut.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{1}{2}L \left(1 - \frac{L}{8}\right) \left(1 + \frac{L}{8}\right)$$

Pada awal pelatihan, model memiliki *training loss* awal sebesar 6. Bantu Abid, sang penjaga GPU, menyelidiki perilaku model tersebut dengan menjawab pertanyaan berikut.

- Formulasikan permasalahan nilai awal (IVP) yang sesuai, lalu selesaikan untuk memperoleh fungsi $L(t)$.
- Apabila durasi waktu yang dibutuhkan agar *training loss* turun hingga bernilai 2 dapat dinyatakan dalam bentuk paling sederhana, yaitu $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, tentukan nilai dari $a + b$.
- Sukirman membuat klaim bahwa jika pelatihan terus dilanjutkan, *training loss* akan semakin mendekati nol. Bantu Abid untuk membuktikan klaim dari Sukirman! Anda dapat membuktikannya dengan menganalisis perilaku $L(t)$ saat $t \rightarrow \infty$.

Topik 5: Aplikasi Integral: Luas Daerah

(20 Poin)

Soal 5.1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 3x$ dan garis $y = x$.

Soal 5.2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh parabola $x = y^2 - 4y$ dan garis $x = 2y - y^2$.

Soal 5.3. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = e^x$, $y = e^{-x}$, dan garis $x = \ln 3$.

Soal 5.4. Daerah R dibatasi oleh parabola $y = 9 - x^2$ dan sumbu- x . Tentukan nilai konstanta c sedemikian rupa sehingga garis horizontal $y = c$ membagi daerah R menjadi dua bagian daerah yang memiliki luas yang persis sama.

Topik 6: Aplikasi Integral: Volume Benda Putar & Penampang Lintang (20 Poin)

Soal 6.1. Sketsalah daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{9 - x^2}$, garis $y = 0$, serta garis $x = -2$ dan $x = 3$. Tunjukkan irisan vertikal tipikal, lalu tentukan volume benda pejal yang terbentuk jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- x .

Soal 6.2. Tentukan volume benda pejal yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabola $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu- y .

Soal 6.3. Alas suatu benda pejal adalah daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Setiap penampang lintang benda pejal yang dipotong oleh bidang tegak lurus sumbu- x berbentuk persegi. Tentukan volume benda pejal tersebut.

Topik 7: Aplikasi Integral: Panjang Kurva

(10 Poin)

Soal 7.1. Hitunglah panjang kurva $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$ pada interval $x \in [1, 2]$.

Soal 7.2. Hitunglah panjang kurva transenden $y = \ln(\sec x)$ dari $x = 0$ hingga $x = \frac{\pi}{3}$.

Topik 8: Aplikasi Integral: Luas Permukaan Benda Putar

(10 Poin)

Soal 8.1. Kurva $y = \sqrt{4 - x^2}$ pada interval $x \in [-1, 1]$ diputar mengelilingi sumbu- x . Hitung luas permukaan benda putar yang dihasilkan.

Soal 8.2. Kurva $y = \frac{x^3}{3}$ pada interval $x \in [0, 1]$ diputar mengelilingi sumbu- y . Hitung luas permukaan benda putar yang dihasilkan.

Pertanyaan Refleksi

Setelah menyelesaikan seluruh Pekerjaan Rumah ini, luangkan waktu sejenak untuk merefleksikan dan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

- Bagian materi atau konsep mana dalam PR ini yang Anda rasakan paling menantang/sulit? Mengapa konsep tersebut terasa sulit bagi Anda?
- Strategi belajar atau sumber daya bantuan apa yang Anda gunakan dan terbukti paling efektif membantu Anda untuk memahami konsep yang menantang tersebut?
- Berikan penilaian mandiri terhadap tingkat pemahaman Anda untuk topik minggu ini pada skala 1–10 (1 = tidak paham sama sekali, 10 = paham sepenuhnya). Berikan alasan singkat di balik penilaian tersebut.

**Bagian refleksi ini wajib diisi sebagai komitmen proses belajar mandiri Anda dan akan digunakan oleh Asisten Dosen untuk memetakan kebutuhan pemahaman kelas asistensi berikutnya.*