

PR 5
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA
Topik: **Teknik Pengintegralan**

Topik 1: Pendahuluan & Strategi Memilih Teknik Integrasi (10 Poin)

Petunjuk Khusus: Untuk setiap soal berikut (Soal 1.1.1 sampai 1.1.10), Anda **tidak perlu** menghitung hasil akhir pengintegralan secara lengkap. Anda hanya diminta untuk:

- Mengidentifikasi teknik integrasi utama yang paling sesuai dan efisien (misalnya: substitusi variabel biasa, integrasi parsial, substitusi trigonometri, atau substitusi merasionalkan).
- Menjelaskan secara singkat dan logis alasan di balik pemilihan teknik tersebut berdasarkan bentuk integran.

Soal 1.1.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$$

Solusi Soal 1.1

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- Teknik Utama:** Substitusi variabel biasa (u -substitution).
- Alasan:** Integran memiliki bentuk fungsi rasional dalam $\sin^2 x$. Jika kita misalkan $u = \sin^2 x$, maka turunannya adalah $du = 2 \sin x \cos x dx$, yang persis sebanding dengan pembilang $\sin x \cos x dx$. Substitusi ini mengubah integral menjadi $\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du$ yang merupakan bentuk standar integral invers tangen.

Soal 1.2.

$$\int x \ln(x^2 + 1) dx$$

Solusi Soal 1.2

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- Teknik Utama:** Substitusi variabel biasa yang dilanjutkan dengan integrasi parsial.
- Alasan:** Pertama, lakukan substitusi $u = x^2 + 1$ dengan $du = 2x dx$ untuk menyederhanakan fungsi logaritma dalam integran menjadi bentuk $\frac{1}{2} \int \ln(u) du$. Selanjutnya, integral $\int \ln(u) du$ diselesaikan dengan teknik integrasi parsial ($\int w dv$) menggunakan aturan LIATE, di mana kita memilih bagian logaritma sebagai fungsi yang diturunkan.

Soal 1.3.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$$

Solusi Soal 1.3

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi variabel biasa untuk mengarah ke bentuk substitusi trigonometri (atau substitusi langsung $x^2 = \sec \theta$).
- b) **Alasan:** Jika kita kalikan pembilang dan penyebut dengan x didapatkan $\int \frac{x}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} dx$. Hal ini menunjukkan bahwa substitusi awal $u = x^2 \implies du = 2x dx$ akan menyederhanakan bentuknya menjadi $\frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$. Bentuk ini dapat diselesaikan langsung menggunakan integral standar secant invers, atau secara umum dengan substitusi trigonometri $u = \sec \theta$.

Soal 1.4.

$$\int e^x \sin(e^x) \cos(e^x) dx$$

Solusi Soal 1.4

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi variabel biasa.
- b) **Alasan:** Kehadiran faktor e^x di luar fungsi trigonometri berfungsi sebagai turunan dari argumen fungsi trigonometri tersebut. Melalui substitusi $u = e^x \implies du = e^x dx$, integral langsung berubah menjadi bentuk $\int \sin u \cos u du$, yang dapat diselesaikan dengan substitusi lanjutan $w = \sin u$ atau menggunakan identitas sudut ganda $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin(2u)$.

Soal 1.5.

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

Solusi Soal 1.5

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi variabel biasa dilanjutkan dengan integrasi parsial.
- b) **Alasan:** Faktor $\frac{1}{x}$ adalah turunan dari fungsi logaritma luar, yaitu $\ln x$. Dengan menggunakan substitusi awal $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$, integral menyederhanakan menjadi $\int \ln(u) du$. Integral baru ini kemudian diselesaikan menggunakan integrasi parsial dengan memisalkan $w = \ln u$ dan $dv = du$.

Soal 1.6.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

Solusi Soal 1.6

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi merasionalkan (atau substitusi aljabar).
- b) **Alasan:** Kehadiran akar kuadrat pada penyebut menyarankan kita untuk melakukan substitusi merasionalkan $u = \sqrt{e^x + 1}$. Ini mengakibatkan $e^x = u^2 - 1$ dan $dx = \frac{2u}{u^2 - 1} du$. Karena pembilang memiliki faktor $e^{2x} = e^x \cdot e^x$, substitusi ini akan mengeliminasi seluruh bentuk akar dan eksponensial menjadi integral fungsi rasional aljabar biasa.

Soal 1.7.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Solusi Soal 1.7

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi aljabar biasa (atau substitusi trigonometri $x = \sin \theta$).
- b) **Alasan:** Pembilang memiliki pangkat ganjil $x^3 = x^2 \cdot x$, dan kita tahu bahwa turunan dari bagian di dalam akar $(1 - x^2)$ adalah $-2x$. Dengan substitusi aljabar $u = 1 - x^2 \implies x^2 = 1 - u$ dan $x dx = -\frac{1}{2} du$, integral dapat dikonversi menjadi integral aljabar sederhana $\int \frac{1-u}{\sqrt{u}} du$ tanpa perlu melakukan substitusi trigonometri yang lebih kompleks.

Soal 1.8.

$$\int x^2 \arctan x dx$$

Solusi Soal 1.8

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Integrasi parsial.
- b) **Alasan:** Integralkan terdiri dari perkalian dua fungsi yang berbeda jenis: fungsi aljabar (x^2) dan fungsi siklotrik/invers trigonometri ($\arctan x$). Berdasarkan aturan prioritas LIATE, fungsi invers trigonometri dipilih sebagai u karena mudah diturunkan, sedangkan fungsi aljabar dipilih sebagai dv untuk diintegrasikan.

Soal 1.9.

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

Solusi Soal 1.9

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Manipulasi aljabar diikuti dengan substitusi biasa (atau substitusi $u = e^x$).
- b) **Alasan:** Dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan faktor e^{-x} , kita mendapatkan integral $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$. Bentuk ini sangat mudah diselesaikan dengan substitusi $u = e^{-x}+1$ karena pembilangnya sekarang merupakan kelipatan konstan dari turunan penyebutnya.

Soal 1.10.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Solusi Soal 1.10

Teknik utama yang dipilih tepat. (0,4 poin)

Alasan dikaitkan dengan struktur integran atau turunan yang relevan. (0,6 poin)

- a) **Teknik Utama:** Substitusi merasionalkan (substitusi pangkat pecahan).
- b) **Alasan:** Integran mengandung dua buah bentuk akar dengan indeks yang berbeda, yaitu akar pangkat dua ($\sqrt{x} = x^{1/2}$) dan akar pangkat tiga ($\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$). Dengan memilih substitusi merasionalkan $x = u^6$ (di mana 6 adalah kelipatan persekutuan terkecil dari 2 dan 3), kedua bentuk akar tersebut akan tereliminasi secara bersamaan menjadi pangkat bulat positif dari u .

Topik 2: Teknik Integrasi Dasar**(10 Poin)****Soal 2.1.** Tentukan hasil integral tentu berikut:

$$\int_1^3 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx$$

Solusi Soal 2.1

- a)
- Pilih Bagian yang Ingin Disubstitusi:**

Misal $u = x^3 + 3x$, kita dapati:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 3 \implies du = 3x^2 + 3dx \implies dx = \frac{du}{3x^2 + 3}$$

- b)
- Ubah Batas Integral Menjadi Terhadap U:**

- Batas Bawah: $x = 1 \implies u = 1^3 + 3(1) = 1 + 3 = 4$
- Batas Atas: $x = 3 \implies u = 3^3 + 3(3) = 27 + 9 = 36$

c) **Sederhanakan Integral:**

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}} dx \\
 &= \int_4^{36} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{3x^2 + 3} \\
 &= \int_4^{36} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{3(x^2 + 1)} \\
 &= \int_4^{36} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \int_4^{36} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\
 &= \frac{1}{3} \int_4^{36} u^{-1/2} du
 \end{aligned}$$

d) **Evaluasi Integral Terhadap U :**

$$= \frac{1}{3} [2\sqrt{u}]_4^{36} = \frac{2}{3} (\sqrt{36} - \sqrt{4}) = \frac{2}{3} (6 - 2) = \frac{2}{3} (4) = \frac{8}{3}$$

Jadi, hasil integral tentu tersebut adalah $\frac{8}{3}$

Soal 2.2. Tentukan hasil integral tentu berikut:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(3x) + \sin(5x)) dx$$

Solusi Soal 2.2

a) **Pisah Integral Jadi Dua Bagian:**

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(3x) + \sin(5x)) dx \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(3x) dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(5x) dx
 \end{aligned}$$

b) **Selesaikan Bagian Pertama Integral:**

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(3x) dx$$

$$\text{Misal } u = 3x \implies \frac{du}{dx} = 3 \implies dx = \frac{du}{3}$$

Batas-batas integral terhadap u :

- Batas Atas: $x = \frac{\pi}{2} \implies u = 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$
- Batas Bawah: $x = \frac{-\pi}{2} \implies u = 3\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$

Selesaikan bagian pertama integral terhadap u :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(3x) dx \\
 &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(u) \frac{du}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(u) du \\
 &= \left[\frac{1}{3} \sin(u) \right]_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3} \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Kita tahu $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ dan $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, maka hasil integral bagian pertama adalah:

$$= \frac{1}{3}(-1 - 1) = -\frac{2}{3}$$

c) **Selesaikan Bagian Kedua Integral:**

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(5x) dx$$

Misal $u = 5x \implies \frac{du}{dx} = 5 \implies dx = \frac{du}{5}$

Batas-batas integral terhadap u :

- Batas Atas: $x = \frac{\pi}{2} \implies u = 5\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2}$
- Batas Bawah: $x = \frac{-\pi}{2} \implies u = 5\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi}{2}$

Selesaikan bagian kedua integral terhadap u :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(5x) dx \\
 &= \int_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin(u) \frac{du}{5} \\
 &= \frac{1}{5} \int_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin(u) du \\
 &= \left[-\frac{1}{5} \cos(u) \right]_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} = -\frac{1}{5} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Kita tahu $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ dan $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ juga, maka hasil integral bagian kedua adalah:

$$= -\frac{1}{5}(0 - 0) = 0$$

d) **Jumlahkan Hasil Kedua Bagian Integral:**

Kita dapati hasil dari integral tentu tersebut adalah:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(3x) + \sin(5x)) dx = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}$$

Jadi, hasil integral tentu tersebut adalah $-\frac{2}{3}$.

Soal 2.3. Tentukan hasil integral tentu berikut:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \cos(\pi \sin(\theta)) d\theta$$

Solusi Soal 2.3a) **Pilih Bagian yang Ingin Disubstitusi:**

$$\text{Misal } u = \pi \sin(\theta) \implies \frac{du}{d\theta} = \pi \cos(\theta) \implies du = \pi \cos(\theta) d\theta \implies d\theta = \frac{du}{\pi \cos(\theta)}$$

b) **Ubah Batas Integral Menjadi Terhadap U:**

- Batas Atas: $\theta = \frac{\pi}{2} \implies u = \pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi(1) = \pi$
- Batas Bawah: $\theta = -\frac{\pi}{2} \implies u = \pi \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi(-1) = -\pi$

c) **Sederhanakan Integran, lalu Evaluasi Integral terhadap u:**

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \cos(\pi \sin(\theta)) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) \cos(u) \frac{du}{\pi \cos(\theta)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) \frac{du}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} [\sin(u)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (\sin(\pi) - \sin(-\pi)) = \frac{1}{\pi} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Jadi, hasil integral tentu tersebut adalah 0.

Soal 2.4. Tentukan hasil integral tentu berikut:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)(1 + \sin(x))^3 dx$$

Solusi Soal 2.4

a) **Pilih Bagian yang Ingin Disubstitusi:**

$$\text{Misal } u = 1 + \sin(x) \implies \frac{du}{dx} = \cos(x) \implies du = \cos(x)dx \implies dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

b) **Ubah Batas Integral Menjadi Terhadap U:**

- Batas Atas: $x = \frac{\pi}{2} \implies u = 1 + \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$
- Batas Bawah: $x = 0 \implies u = 1 + \sin(0) = 1 + 0 = 1$

c) **Sederhanakan Integran, lalu Evaluasi Integral terhadap u:**

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \cos(x)(1 + \sin(x))^3 dx \\ &= \int_1^2 \cos(x)(u)^3 \frac{du}{\cos(x)} \\ &= \int_1^2 (u)^3 du \\ &= \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} (2^4 - 1^4) = \frac{1}{4} (16 - 1) = \frac{1}{4} (15) = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Jadi, hasil integral tentu tersebut adalah $\frac{15}{4}$.

Topik 3: Teknik Integrasi Lanjutan**(10 Poin)**

Soal 3.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

Solusi Soal 3.1

Misalkan kita gunakan substitusi merasionalkan:

$$u = \sqrt{x+1} \implies u^2 = x+1 \implies x = u^2 - 1$$

Diferensialkan terhadap u :

$$dx = 2u du$$

Substitusikan bentuk di atas ke dalam integral:

$$I = \int \frac{u-1}{u+1} (2u du) = 2 \int \frac{u^2 - u}{u+1} du$$

Lakukan pembagian suku banyak (polynomial division) pada pembilang:

$$\frac{u^2 - u}{u+1} = u - 2 + \frac{2}{u+1}$$

Integralkan masing-masing suku secara terpisah:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \left(u - 2 + \frac{2}{u+1} \right) du \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} u^2 - 2u + 2 \ln |u+1| \right) + C \\ &= u^2 - 4u + 4 \ln |u+1| + C \end{aligned}$$

Substitusikan kembali nilai $u = \sqrt{x+1}$ (perhatikan bahwa $\sqrt{x+1} + 1 > 0$, sehingga tanda mutlak pada logaritma dapat diabaikan):

$$I = (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C$$

Karena 1 dapat digabungkan ke dalam konstanta integrasi C , kita dapat menyederhanakan jawaban menjadi:

$$I = x - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{x - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C}$.

Soal 3.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

Solusi Soal 3.2

Tulis ulang integran untuk melihat strukturnya:

$$I = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} dx$$

Misalkan:

$$u = e^{-x} \implies du = -e^{-x} dx \implies -du = e^{-x} dx$$

Substitusikan ke dalam integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\ &= -\arcsin(u) + C \end{aligned}$$

Substitusikan kembali nilai $u = e^{-x}$:

$$I = -\arcsin(e^{-x}) + C$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{-\arcsin(e^{-x}) + C}$.

Topik 4: Integrasi Perkalian Fungsi

(10 Poin)

Soal 4.1. Diberikan integral berikut.

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

- Tentukan u dan dv yang paling sesuai untuk metode integrasi parsial serta jelaskan alasannya.
- Hitung nilai integral tersebut.

Solusi Soal 4.1

- Menentukan u dan dv

Pilih

$$u = \ln x, \quad dv = \sqrt{x} \, dx = x^{1/2} \, dx$$

Maka diperoleh

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

Pemilihan tersebut sesuai dengan aturan **LIATE**, karena fungsi logaritma lebih diutamakan sebagai u sehingga turunannya menjadi lebih sederhana.

- Hitung integral parsialnya,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + C \\ &= \boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C} \end{aligned}$$

Soal 4.2. Hitunglah integral berikut menggunakan metode integrasi parsial.

$$\int x e^{2x} \, dx$$

Solusi Soal 4.2

Pilih

$$u = x, \quad dv = e^{2x} \, dx$$

Maka

$$du = dx, \quad v = \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Dengan menggunakan rumus integrasi parsial,

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\int x e^{2x} \, dx &= x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) + C \\ &= \boxed{\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C}\end{aligned}$$

Topik 5: Integrasi Perkalian Fungsi Lanjutan

(10 Poin)

Soal 5.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int x^3 \cos(2x) \, dx$$

Solusi Soal 5.1

Metode tabular sangat efisien untuk menghitung integral berbentuk $\int P(x)f(x) \, dx$ di mana $P(x)$ adalah polinomial dan $f(x)$ adalah fungsi yang mudah diintegrasikan secara berulang (seperti sinus, kosinus, atau eksponensial).

Di sini, kita letakkan turunan dari $u = x^3$ pada kolom pertama, dan integral dari $dv = \cos(2x)$ pada kolom kedua, dengan tanda yang bergantian:

Tanda	Turunan (u)	Integral (dv)
+	x^3	$\cos(2x)$
−	$3x^2$	$\frac{1}{2} \sin(2x)$
+	$6x$	$-\frac{1}{4} \cos(2x)$
−	6	$-\frac{1}{8} \sin(2x)$
+	0	$\frac{1}{16} \cos(2x)$

Kalikan baris ke- i pada kolom Turunan dengan baris ke- $(i+1)$ pada kolom Integral beserta tandanya:

$$\begin{aligned}I &= x^3 \left(\frac{1}{2} \sin(2x) \right) - 3x^2 \left(-\frac{1}{4} \cos(2x) \right) + 6x \left(-\frac{1}{8} \sin(2x) \right) - 6 \left(\frac{1}{16} \cos(2x) \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x^3 \sin(2x) + \frac{3}{4} x^2 \cos(2x) - \frac{3}{4} x \sin(2x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + C\end{aligned}$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{\frac{1}{2} x^3 \sin(2x) + \frac{3}{4} x^2 \cos(2x) - \frac{3}{4} x \sin(2x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + C}$.

Soal 5.2. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int e^{2x} \sin(3x) dx$$

Solusi Soal 5.2

Misalkan $I = \int e^{2x} \sin(3x) dx$.

Gunakan integrasi parsial pertama. Misalkan:

$$u_1 = \sin(3x) \implies du_1 = 3 \cos(3x) dx$$

$$dv_1 = e^{2x} dx \implies v_1 = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Maka:

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos(3x) dx$$

Lakukan integrasi parsial kedua pada bagian integral sisa, yaitu $\int e^{2x} \cos(3x) dx$. Misalkan:

$$u_2 = \cos(3x) \implies du_2 = -3 \sin(3x) dx$$

$$dv_2 = e^{2x} dx \implies v_2 = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Maka:

$$\int e^{2x} \cos(3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-3 \sin(3x)) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{2} I$$

Substitusikan kembali ke persamaan awal untuk I :

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \cos(3x) + \frac{3}{2} I \right]$$

$$I = \frac{1}{2} e^{2x} \sin(3x) - \frac{3}{4} e^{2x} \cos(3x) - \frac{9}{4} I$$

Kumpulkan suku-suku yang mengandung I ke ruas kiri:

$$I + \frac{9}{4} I = \frac{13}{4} I = e^{2x} \left(\frac{1}{2} \sin(3x) - \frac{3}{4} \cos(3x) \right)$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{4}{13}$ dan tambahkan konstanta integrasi C :

$$I = \frac{4}{13} e^{2x} \left(\frac{2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)}{4} \right) + C$$

$$I = \frac{e^{2x}}{13} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) + C$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{\frac{e^{2x}}{13} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) + C}$.

Topik 6: Integral Trigonometri

(10 Poin)

Soal 6.1. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x \, dx$$

Solusi Soal 6.1Pisahkan faktor $\sec^4 x$ menjadi $\sec^2 x \cdot \sec^2 x$, lalu gunakan identitas $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$:

$$I = \int \tan^{-3/2} x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \tan^{-3/2} x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx.$$

Misalkan:

$$u = \tan x \implies du = \sec^2 x \, dx.$$

Dengan demikian:

$$\begin{aligned} I &= \int u^{-3/2} (1 + u^2) \, du \\ &= \int (u^{-3/2} + u^{1/2}) \, du \\ &= -2u^{-1/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Substitusikan kembali $u = \tan x$:

$$I = -2 \tan^{-1/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C.$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{\frac{2}{3} \tan^{3/2} x - 2 \tan^{-1/2} x + C}.$ **Soal 6.2.** Hitung nilai integral tentu berikut:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \, d\theta$$

Solusi Soal 6.2Gunakan rumus reduksi untuk integral pangkat sinus pada interval $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \theta \, d\theta, \quad n \geq 2.$$

Untuk $n = 6$, diperoleh:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \, d\theta = \frac{5}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, d\theta.$$

Terapkan rumus reduksi kembali:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta,$$

dan

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Maka:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \, d\theta = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{32}.$$

Jadi, nilai integral tentu tersebut adalah $\boxed{\frac{5\pi}{32}}$.

Topik 7: Integral Bentuk Akar Kuadratik

(15 Poin)

Soal 7.1. Untuk $x > 3$, tentukan hasil integral berikut:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} \, dx.$$

Solusi Soal 7.1

Karena bentuk akar adalah $\sqrt{x^2 - 3^2}$, gunakan substitusi

$$x = 3 \sec \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Maka

$$dx = 3 \sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

dan

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 \sec^2 \theta - 9} = 3 \tan \theta.$$

Dengan demikian, integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} \, dx &= \int \frac{3 \tan \theta}{(3 \sec \theta)^3} (3 \sec \theta \tan \theta \, d\theta) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int \sin^2 \theta \, d\theta. \end{aligned}$$

Gunakan identitas

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \sin^2 \theta \, d\theta &= \frac{1}{6} \int (1 - \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= \frac{\theta}{6} - \frac{\sin 2\theta}{12} + C. \end{aligned}$$

Untuk mengembalikan hasil ke variabel x , dari

$$\sec \theta = \frac{x}{3}$$

diperoleh segitiga siku-siku dengan sisi miring = x , sisi samping = 3, dan sisi depan = $\sqrt{x^2 - 9}$. Jadi,

$$\cos \theta = \frac{3}{x}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x},$$

sehingga

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{x}\right)$$

dan

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{6\sqrt{x^2 - 9}}{x^2}.$$

Substitusi kembali memberikan

$$\boxed{\frac{1}{6} \arccos\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x^2} + C}.$$

Syarat $x > 3$ menjamin pemilihan sudut, tanda akar, dan panjang sisi segitiga tetap konsisten.

Soal 7.2. Tentukan hasil integral tentu berikut:

$$\int_0^{1/4} \frac{x^5}{(1 + 16x^2)^{3/2}} dx.$$

Hint: Setelah substitusi trigonometri pertama, Anda mungkin memerlukan substitusi kedua agar integral dapat diselesaikan secara efisien.

Solusi Soal 7.2

Misalkan

$$x = \frac{1}{4} \tan \theta, \quad dx = \frac{1}{4} \sec^2 \theta d\theta.$$

Batas integral berubah secara langsung sebagai berikut:

$$x = 0 \implies \theta = 0,$$

$$x = \frac{1}{4} \implies \tan \theta = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Selain itu,

$$1 + 16x^2 = 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta,$$

sehingga

$$(1 + 16x^2)^{3/2} = \sec^3 \theta.$$

Maka, jika integral tersebut dinyatakan sebagai I , diperoleh

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/4} \frac{x^5}{(1 + 16x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{1}{4096} \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^5 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Selanjutnya, gunakan substitusi kedua

$$u = \sec \theta, \quad du = \sec \theta \tan \theta \, d\theta.$$

Untuk manipulasi integrannya, tulis

$$\frac{\tan^5 \theta}{\sec \theta} \, d\theta = \tan^4 \theta \frac{\tan \theta}{\sec \theta} \, d\theta.$$

Karena

$$\tan^2 \theta = u^2 - 1$$

dan

$$\frac{\tan \theta}{\sec \theta} \, d\theta = \frac{du}{u^2},$$

sedangkan batas baru adalah $u = 1$ dan $u = \sqrt{2}$, maka

$$I = \frac{1}{4096} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(u^2 - 1)^2}{u^2} \, du.$$

Jadi,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4096} \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 2 + u^{-2}) \, du \\ &= \frac{1}{4096} \left[\frac{u^3}{3} - 2u - \frac{1}{u} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{16 - 11\sqrt{2}}{24576}}. \end{aligned}$$

Topik 8: Kombinasi Teknik Pengintegralan

(15 Poin)

Soal 8.1. Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int x^3 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Solusi Soal 8.1

Misalkan $x = \sin \theta$. Maka $dx = \cos \theta \, d\theta$. Bentuk akar menjadi:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$$

Substitusikan ke dalam integral:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1 - x^2} \, dx &= \int (\sin^3 \theta)(\cos \theta)(\cos \theta \, d\theta) \\ &= \int \sin^3 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

Gunakan identitas trigonometri $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$\int (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

Misalkan $u = \cos \theta$. Maka $du = -\sin \theta d\theta \implies \sin \theta d\theta = -du$. Integral menjadi:

$$\begin{aligned}\int (1 - u^2)u^2(-du) &= \int (u^4 - u^2) du \\ &= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C\end{aligned}$$

Substitusikan kembali $u = \cos \theta$:

$$= \frac{1}{5}\cos^5 \theta - \frac{1}{3}\cos^3 \theta + C$$

Karena $x = \sin \theta$, maka $\cos \theta = \sqrt{1 - x^2}$. Substitusikan kembali ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{5}(\sqrt{1 - x^2})^5 - \frac{1}{3}(\sqrt{1 - x^2})^3 + C \\ &= \frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C\end{aligned}$$

Jadi, hasil integral tersebut adalah $\boxed{\frac{1}{5}(1 - x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} + C}$.

Soal 8.2. Tentukan nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^3 x \ln(x + 1) dx$$

Solusi Soal 8.2

Gunakan rumus integrasi parsial. Misalkan $u = \ln(x + 1)$ dan $dv = x dx$. Maka $du = \frac{1}{x+1} dx$ dan $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 x \ln(x + 1) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x + 1) \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x + 1) \right]_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2}{x + 1} dx\end{aligned}$$

Lakukan manipulasi aljabar dengan menambahkan $+1 - 1$ pada pembilang:

$$\frac{x^2}{x + 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1) + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$$

Integralkan bentuk tersebut:

$$\int_0^3 \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x + 1) \right]_0^3$$

Maka persamaan integral menjadi:

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x + 1) \right]_0^3 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x + 1) \right]_0^3$$

Evaluasi batas atas $x = 3$ dan batas bawah $x = 0$:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{9}{2} \ln(4) - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - 3 + \ln(4) \right) \right) - (0 - 0) \\ &= \frac{9}{2} \ln(4) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln(4) \\ &= 4 \ln(4) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari integral tentu tersebut adalah $4 \ln(4) - \frac{3}{4}$.

Soal 8.3. Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Solusi Soal 8.3

Pecah integran menjadi dua bagian:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Untuk integral pertama, misalkan $u = 4 - x^2$. Maka $du = -2x dx \implies x dx = -\frac{1}{2} du$:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} dx &= 3 \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2} du \right) \\ &= -\frac{3}{2} \int u^{-1/2} du \\ &= -\frac{3}{2} \left(2u^{1/2} \right) = -3\sqrt{u} \\ &= -3\sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

Untuk integral kedua, gunakan rumus standar integral fungsi invers trigonometri:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{2} \right)$$

Gabungkan hasil dari kedua integral tersebut. Jadi, hasil integralnya adalah

$$-3\sqrt{4-x^2} + \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) + C.$$

Topik 9: Latihan Komprehensif & Problem Solving

(10 Poin)

Soal 9.1. Sebuah model kecerdasan artifisial untuk mendeteksi penyakit dari citra medis menggunakan fungsi *feature weighting*

$$w(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 4},$$

dengan x menyatakan tingkat aktivasi suatu fitur. Total kontribusi fitur pada interval $0 \leq x \leq 2$ didefinisikan sebagai

$$I = \int_0^2 x^3 \sqrt{x^2 + 4} \, dx.$$

- Tentukan teknik integrasi yang paling sesuai dan jelaskan alasan pemilihannya.
- Hitung nilai I .
- Jelaskan mengapa integrasi parsial bukan merupakan pilihan pertama yang efisien untuk integral tersebut.

Solusi Soal 9.1

1. Pemilihan teknik integrasi

Integran memuat fungsi komposisi $\sqrt{x^2 + 4}$ dan faktor x^3 . Bagian x^3 dapat ditulis sebagai

$$x^3 \, dx = x^2 (x \, dx).$$

Karena turunan dari $x^2 + 4$ adalah $2x$, substitusi

$$u = x^2 + 4$$

merupakan pilihan yang sesuai. Setelah substitusi, faktor x^2 masih dapat dinyatakan dalam u melalui $x^2 = u - 4$. Dengan demikian, metode yang dipilih adalah **substitusi yang disertai manipulasi aljabar**.

2. Menghitung nilai integral

Misalkan

$$u = x^2 + 4, \quad du = 2x \, dx, \quad x \, dx = \frac{1}{2} du.$$

Selain itu,

$$x^2 = u - 4.$$

Ubah batas integrasi:

- Jika $x = 0$, maka $u = 0^2 + 4 = 4$.
- Jika $x = 2$, maka $u = 2^2 + 4 = 8$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x^2 \sqrt{x^2 + 4} (x \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_4^8 (u - 4) u^{1/2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_4^8 (u^{3/2} - 4u^{1/2}) \, du \\ &= \left[\frac{1}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right]_4^8. \end{aligned}$$

Evaluasi pada kedua batas memberikan

$$I = \left(\frac{1}{5} 8^{5/2} - \frac{4}{3} 8^{3/2} \right) - \left(\frac{1}{5} 4^{5/2} - \frac{4}{3} 4^{3/2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{128}{5} \sqrt{2} - \frac{64}{3} \sqrt{2} \right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) \\
&= \frac{64}{15} \sqrt{2} + \frac{64}{15} \\
&= \frac{64}{15} (1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Jadi, total kontribusi fitur tersebut adalah

$$I = \frac{64}{15} (1 + \sqrt{2}).$$

3. Analisis metode alternatif

Integrasi parsial dapat dicoba dengan memisahkan x^3 dan $\sqrt{x^2 + 4}$. Akan tetapi, antiturunan salah satu faktor tidak langsung menyederhanakan faktor lainnya dan justru menghasilkan integral baru yang lebih rumit. Sebaliknya, substitusi $u = x^2 + 4$ segera mengubah seluruh integran menjadi polinom berpangkat pecahan dalam variabel u . Oleh sebab itu, substitusi merupakan metode pertama yang lebih efisien.

Soal 9.2. Dalam suatu model *machine learning*, besar penalti regularisasi untuk tingkat kompleksitas x dimodelkan oleh

$$R(x) = x \ln(1 + x).$$

Total penalti pada interval $0 \leq x \leq 1$ didefinisikan sebagai

$$P = \int_0^1 x \ln(1 + x) \, dx.$$

- Tentukan teknik integrasi yang paling sesuai dan jelaskan alasan pemilihannya.
- Hitung nilai P .
- Seorang mahasiswa mengusulkan substitusi langsung $u = 1 + x$. Jelaskan mengapa substitusi tersebut belum menyelesaikan inti persoalan.

Solusi Soal 9.2

1. Pemilihan teknik integrasi

Integran merupakan hasil kali fungsi aljabar x dan fungsi logaritma $\ln(1 + x)$. Turunan fungsi logaritma menjadi fungsi rasional yang lebih sederhana, sedangkan x mudah diintegrasikan. Oleh karena itu, teknik yang paling sesuai adalah **integrasi parsial**.

Gunakan

$$u = \ln(1 + x), \quad dv = x \, dx.$$

Maka

$$du = \frac{1}{1 + x} \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

2. Menghitung nilai integral

Berdasarkan rumus integrasi parsial

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

diperoleh

$$P = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} \, dx.$$

Lakukan pembagian polinom:

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

sebab

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Jadi, total penalti regularisasi adalah

$$\boxed{P = \frac{1}{4}}.$$

3. Analisis substitusi langsung

Jika dipilih $u = 1 + x$, maka $x = u - 1$ dan $du = dx$. Integral berubah menjadi

$$\int (u-1) \ln u \, du.$$

Substitusi tersebut hanya mengganti variabel; hasilnya masih berupa hasil kali fungsi aljabar dan logaritma. Integral baru tersebut tetap memerlukan integrasi parsial. Jadi, substitusi $u = 1 + x$ tidak salah, tetapi belum menyelesaikan inti persoalan dan menambahkan satu tahap yang tidak diperlukan.