

**PR 4**  
**KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026**  
**FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA**  
Topik: **Integral 1**

**Topik 1: Integral Tak Tentu dan Tentu**

**(50 Poin)**

**Soal 1.1. (5 Poin) Aplikasi Konstanta Integrasi dan Kekontinuan Fisik**

Sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus dengan percepatan  $a(t)$  yang didefinisikan sebagai fungsi pias (piecewise) berikut:

$$a(t) = \begin{cases} 4t - 2, & 0 \leq t < 2 \\ 6e^{2-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

dengan  $t$  dalam detik dan  $a(t)$  dalam  $\text{m/s}^2$ . Diketahui bahwa pada saat awal  $t = 0$ , partikel berada di posisi  $s(0) = 3$  meter dengan kecepatan awal  $v(0) = -1$  m/s.

- Tentukan fungsi kecepatan  $v(t)$  untuk  $t \geq 0$  dan tunjukkan secara formal menggunakan konsep limit bahwa  $v(t)$  kontinu di  $t = 2$ .
- Tentukan fungsi posisi  $s(t)$  untuk  $t \geq 0$ , tunjukkan bahwa  $s(t)$  kontinu di  $t = 2$ , dan hitung posisi partikel pada saat  $t = 3$  detik.
- Tentukan apakah partikel pernah berbalik arah (kecepatan bernilai nol) selama perjalanannya untuk  $t \geq 0$ . Jika ya, tentukan waktu  $t$  tersebut.

**Solusi Soal 1.1**

**a) Mencari Fungsi Kecepatan  $v(t)$ :**

Kecepatan adalah integral dari percepatan, yaitu  $v(t) = \int a(t) dt$ .

Untuk interval  $0 \leq t < 2$ :

$$v(t) = \int (4t - 2) dt = 2t^2 - 2t + C_1$$

Menggunakan kecepatan awal  $v(0) = -1$ :

$$v(0) = 2(0)^2 - 2(0) + C_1 = -1 \implies C_1 = -1$$

Sehingga,  $v(t) = 2t^2 - 2t - 1$  untuk  $0 \leq t < 2$ .

Untuk interval  $t \geq 2$ :

$$v(t) = \int 6e^{2-t} dt = -6e^{2-t} + C_2$$

Karena partikel adalah objek fisik nyata, kecepatannya tidak boleh mengalami loncatan seketika (harus kontinu di  $t = 2$ ). Artinya,  $\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) = v(2)$ .

Hitung limit kiri:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} (2t^2 - 2t - 1) = 2(2)^2 - 2(2) - 1 = 3$$

Hitung limit kanan dan nilai fungsi di  $t = 2$ :

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) = v(2) = -6e^{2-2} + C_2 = -6 + C_2$$

Samakan limit kiri dan limit kanan:

$$3 = -6 + C_2 \implies C_2 = 9$$

Sehingga diperoleh:

$$v(t) = \begin{cases} 2t^2 - 2t - 1, & 0 \leq t < 2 \\ -6e^{2-t} + 9, & t \geq 2 \end{cases}$$

Karena  $\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) = v(2) = 3$ , maka terbukti  $v(t)$  kontinu di  $t = 2$ .

b) **Mencari Fungsi Posisi  $s(t)$ :**

Posisi adalah integral dari kecepatan, yaitu  $s(t) = \int v(t) dt$ .

Untuk interval  $0 \leq t < 2$ :

$$s(t) = \int (2t^2 - 2t - 1) dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + D_1$$

Menggunakan posisi awal  $s(0) = 3$ :

$$s(0) = \frac{2}{3}(0)^3 - (0)^2 - (0) + D_1 = 3 \implies D_1 = 3$$

Sehingga,  $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 3$  untuk  $0 \leq t < 2$ .

Untuk interval  $t \geq 2$ :

$$s(t) = \int (-6e^{2-t} + 9) dt = 6e^{2-t} + 9t + D_2$$

Posisi partikel juga harus kontinu di  $t = 2$ , sehingga  $\lim_{t \rightarrow 2^-} s(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} s(t) = s(2)$ .

Hitung limit kiri:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} s(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left( \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 3 \right) = \frac{16}{3} - 4 - 2 + 3 = \frac{7}{3}$$

Hitung limit kanan dan nilai fungsi di  $t = 2$ :

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} s(t) = s(2) = 6e^{2-2} + 9(2) + D_2 = 24 + D_2$$

Samakan limit kiri dan limit kanan:

$$\frac{7}{3} = 24 + D_2 \implies D_2 = \frac{7}{3} - \frac{72}{3} = -\frac{65}{3}$$

Sehingga diperoleh:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 3, & 0 \leq t < 2 \\ 6e^{2-t} + 9t - \frac{65}{3}, & t \geq 2 \end{cases}$$

Karena  $\lim_{t \rightarrow 2^-} s(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} s(t) = s(2) = \frac{7}{3}$ , maka terbukti  $s(t)$  kontinu di  $t = 2$ .

Pada saat  $t = 3$  detik (menggunakan kasus kedua  $t \geq 2$ ):

$$s(3) = 6e^{2-3} + 9(3) - \frac{65}{3} = 6e^{-1} + 27 - \frac{65}{3} = \frac{6}{e} + \frac{16}{3} \text{ meter.}$$

c) **Analisis Arah Gerak Partikel (Berbalik Arah):**

Partikel berbalik arah ketika kecepatannya bernilai nol, yaitu  $v(t) = 0$ , dan tanda dari  $v(t)$  mengalami perubahan di sekitar titik tersebut.

Kasus 1:  $0 \leq t < 2$

$$2t^2 - 2t - 1 = 0$$

Menggunakan rumus kuadrat (rumus abc):

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Karena kita hanya meninjau  $t \geq 0$ , maka satu-satunya nilai  $t$  yang mungkin adalah:

$$t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \approx 1.366 \text{ detik}$$

Karena  $t \approx 1.366$  berada dalam interval  $0 \leq t < 2$ , maka titik ini valid. Perhatikan bahwa  $v(0) = -1 < 0$  dan  $\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = 3 > 0$ , sehingga  $v(t)$  berubah tanda dari negatif (bergerak ke kiri) menjadi positif (bergerak ke kanan). Jadi partikel berbalik arah di titik ini.

Kasus 2:  $t \geq 2$

$$-6e^{2-t} + 9 = 0 \implies e^{2-t} = \frac{9}{6} = 1.5 \implies 2 - t = \ln(1.5) \implies t = 2 - \ln(1.5)$$

Karena  $\ln(1.5) \approx 0.405 > 0$ , maka  $t \approx 1.595$  detik. Namun, nilai ini tidak berada dalam interval  $t \geq 2$ . Oleh karena itu, pada kasus kedua tidak ada titik berbalik arah.

Jadi, partikel berbalik arah tepat satu kali, yaitu pada saat  $t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$  detik.

**Soal 1.2. (5 Poin) Persamaan Integral, Teorema Dasar Kalkulus I, dan Aturan Rantai**

Diberikan fungsi kontinu  $f : [-\frac{1}{4}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  yang memenuhi persamaan integral berikut untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{x^2-x} f(t) dt = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$$

- Tentukan rumus fungsi definitif  $f(y)$  untuk domain  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- Menggunakan rumus fungsi  $f(y)$  yang diperoleh pada bagian (a), hitunglah nilai dari integral tentu:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^2 f(t) dt$$

**Solusi Soal 1.2**

- Menentukan Rumus Fungsi  $f(y)$ :**

Diberikan persamaan:

$$\int_0^{x^2-x} f(t) dt = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$$

Turunkan kedua ruas terhadap  $x$  dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus I dan Aturan Rantai.

Misalkan  $u(x) = x^2 - x$ . Maka  $\frac{du}{dx} = 2x - 1$ . Berdasarkan aturan rantai untuk integrasi batas fungsi:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^{u(x)} f(t) dt \right) = f(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}$$

Maka, turunan ruas kiri adalah:

$$f(x^2 - x) \cdot (2x - 1)$$

Turunan ruas kanan terhadap  $x$  adalah:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Sehingga kita memiliki persamaan:

$$f(x^2 - x) \cdot (2x - 1) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Perhatikan bahwa ruas kanan dapat difaktorkan dengan membaginya dengan  $(2x - 1)$ . Dengan pembagian polinomial atau sintetis (horner):

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$f(x^2 - x) \cdot (2x - 1) = (x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1)$$

Untuk  $x \neq \frac{1}{2}$ , kita dapat membagi kedua ruas dengan  $(2x - 1)$ :

$$f(x^2 - x) = x^2 - x + 1$$

Karena fungsi  $f$  kontinu, hubungan ini juga harus berlaku di  $x = \frac{1}{2}$ .

Misalkan variabel baru  $y = x^2 - x$ . Nilai minimum dari  $y = x^2 - x$  diperoleh pada koordinat puncak parabola, yaitu  $y_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ . Oleh karena itu, domain variabel  $y$  adalah  $y \geq -\frac{1}{4}$ .

Dengan mengganti  $x^2 - x$  dengan  $y$ , didapatkan rumus fungsi:

$$f(y) = y + 1 \quad \text{untuk } y \geq -\frac{1}{4}$$

b) **Menghitung Integral Tentu:**

Substitusikan  $f(t) = t + 1$  ke dalam integral:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^2 f(t) dt = \int_{-\frac{1}{4}}^2 (t + 1) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-\frac{1}{4}}^2 \\
&= \left( \frac{1}{2}(2)^2 + 2 \right) - \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \right)^2 + \left( -\frac{1}{4} \right) \right) \\
&= (2 + 2) - \left( \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \right) \\
&= 4 - \left( \frac{1-8}{32} \right) \\
&= 4 - \left( -\frac{7}{32} \right) \\
&= 4 + \frac{7}{32} = \boxed{\frac{135}{32}}
\end{aligned}$$

**Soal 1.3. (5 Poin) Mengapit Nilai Integral dengan Sifat Perbandingan**

Sifat perbandingan integral menyatakan bahwa jika  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ , maka  $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$ . Gunakan sifat tersebut untuk membuktikan pertidaksamaan integral berikut:

$$\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 x}} dx \leq \sin^{-1} \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

(Petunjuk: Analisis batas-batas nilai fungsi sinus pada selang  $[0, \frac{\pi}{6}]$ ).

**Solusi Soal 1.3**

Untuk  $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ , kita tahu bahwa fungsi  $\sin x$  bernilai monoton naik dari 0 ke  $\frac{1}{2}$ . Sehingga berlaku:

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

Karena nilai  $\sin x$  berada di antara 0 dan 1, maka kuadratnya juga memenuhi:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

Kalikan seluruh ruas pertidaksamaan dengan  $x^2$  (karena  $x \geq 0$ , maka  $x^2 \geq 0$  dan arah pertidaksamaan tidak berubah):

$$0 \leq x^2 \sin^2 x \leq x^2$$

Kalikan dengan  $-1$  (arah pertidaksamaan dibalik):

$$-x^2 \leq -x^2 \sin^2 x \leq 0$$

Tambahkan 1 pada seluruh ruas:

$$1 - x^2 \leq 1 - x^2 \sin^2 x \leq 1$$

Ambil akar kuadrat pada seluruh ruas (karena semua ruas bernilai positif pada interval  $[0, \frac{\pi}{6}]$ ):

$$\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-x^2 \sin^2 x} \leq 1$$

Lakukan operasi kebalikan (reciprocal), yang membalikkan kembali arah pertidaksamaan:

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Berdasarkan Sifat Perbandingan Integral Tentu pada interval  $[0, \frac{\pi}{6}]$ :

$$\int_0^{\pi/6} 1 \, dx \leq \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 x}} \, dx \leq \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Sekarang, evaluasi masing-masing integral di sisi luar:

- Integral batas bawah:

$$\int_0^{\pi/6} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{6}$$

- Integral batas atas (menggunakan rumus integral standar nomor 13 dengan  $a = 1$ ):

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left[ \sin^{-1}(x) \right]_0^{\pi/6} = \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^{-1}(0) = \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Substitusikan kedua hasil evaluasi tersebut kembali ke pertidaksamaan:

$$\boxed{\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 x}} \, dx \leq \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

(Terbukti).

#### Soal 1.4. (5 Poin) Sifat Integral Tentu: Simetri Fungsi dan Interpretasi Geometri Area

Tanpa mencari rumus antiturunan (integral tak tentu) dari masing-masing suku secara aljabar langsung, hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_{-2}^2 \left( x^5 \cos(x^2) + \sqrt{4-x^2} \right) \, dx$$

Jelaskan secara rinci argumen teoretis (simetri fungsi ganjil/genap) dan geometri (luas daerah kurva standar) yang Anda gunakan untuk menyelesaikan integral tersebut.

#### Solusi Soal 1.4

Gunakan sifat linearitas integral tentu untuk memecah integral menjadi dua bagian:

$$I = \underbrace{\int_{-2}^2 x^5 \cos(x^2) \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \, dx}_{I_2}$$

- a) **Evaluasi Bagian Pertama ( $I_1$ ):**

Definisikan fungsi integrand suku pertama:  $g(x) = x^5 \cos(x^2)$ . Selidiki simetri fungsi  $g(x)$  dengan mensubstitusi  $-x$ :

$$g(-x) = (-x)^5 \cos((-x)^2) = -x^5 \cos(x^2) = -g(x)$$

Karena  $g(-x) = -g(x)$  untuk seluruh  $x$  di domainnya, maka  $g(x)$  merupakan **fungsi ganjil**. Salah satu teorema integral tentu menyatakan bahwa jika fungsi  $g$  adalah fungsi ganjil dan batas integrasinya simetris terhadap titik asal  $[-a, a]$ , maka hasil integralnya bernilai nol:

$$I_1 = \int_{-2}^2 x^5 \cos(x^2) dx = \boxed{0}$$

b) **Evaluasi Bagian Kedua ( $I_2$ ):**

Definisikan fungsi integrand suku kedua:  $y = \sqrt{4 - x^2}$ . Jika kita kuadratkan kedua sisi persamaan (dengan syarat  $y \geq 0$ ):

$$y^2 = 4 - x^2 \implies x^2 + y^2 = 4$$

Persamaan  $x^2 + y^2 = 4$  adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik asal  $(0, 0)$  dengan jari-jari  $r = \sqrt{4} = 2$ . Karena terdapat syarat awal  $y \geq 0$ , maka kurva  $y = \sqrt{4 - x^2}$  secara geometris merepresentasikan **setengah lingkaran bagian atas**.

Batas integral adalah dari  $x = -2$  hingga  $x = 2$ , yang mencakup seluruh diameter lingkaran dari ujung kiri ke ujung kanan. Maka, nilai integral  $I_2$  sama dengan luas daerah di bawah setengah lingkaran tersebut:

$$I_2 = \text{Luas Setengah Lingkaran} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = \boxed{2\pi}$$

Gabungkan kedua hasil evaluasi di atas:

$$I = I_1 + I_2 = 0 + 2\pi = \boxed{2\pi}$$

**Soal 1.5. (5 Poin) Sifat Pergeseran Integrasi dan Simetri Titik**

Suatu fungsi kontinu  $g$  terdefinisi untuk setiap bilangan riil  $x$  dan memenuhi persamaan fungsional berikut:

$$g(x) + g(6 - x) = 8$$

a) Buktikan bahwa nilai integral tentu berikut adalah 16:

$$\int_1^5 g(x) dx = 16$$

b) Jika didefinisikan sebuah fungsi baru  $h(x) = g(x) - 4$ , tunjukkan bahwa grafik fungsi  $y = h(x)$  simetris terhadap titik asal pergeseran  $(3, 0)$  (yang secara matematis berarti menunjukkan bahwa  $h(3 - x) = -h(3 + x)$  untuk semua  $x \in \mathbb{R}$ ).

**Solusi Soal 1.5**

a) **Membuktikan Nilai Integral:**

Misalkan  $I = \int_1^5 g(x) dx$ . Lakukan substitusi variabel menggunakan Teorema Substitusi: Misalkan  $u = 6 - x \implies dx = -du$ . Tentukan batas integrasi baru:

- Batas bawah: Jika  $x = 1$ , maka  $u = 6 - 1 = 5$ .
- Batas atas: Jika  $x = 5$ , maka  $u = 6 - 5 = 1$ .

Substitusikan ke integral  $I$ :

$$I = \int_5^1 g(6-u)(-du) = \int_1^5 g(6-u) du$$

Karena variabel dalam integral tentu adalah variabel boneka (*dummy variable*), kita bebas mengubah penulisan variabel  $u$  kembali menjadi  $x$ :

$$I = \int_1^5 g(6-x) dx$$

Sekarang, jumlahkan kedua bentuk integral  $I$  yang kita miliki:

$$\begin{aligned} I + I &= \int_1^5 g(x) dx + \int_1^5 g(6-x) dx \\ 2I &= \int_1^5 (g(x) + g(6-x)) dx \end{aligned}$$

Substitusikan identitas fungsional  $g(x) + g(6-x) = 8$  ke dalam integral:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_1^5 8 dx \\ 2I &= [8x]_1^5 = 8(5-1) = 32 \\ I &= \boxed{16} \end{aligned}$$

(Terbukti).

b) **Menunjukkan Simetri Titik pada Fungsi  $h(x)$ :**

Diberikan  $h(x) = g(x) - 4$ . Kita ingin membuktikan bahwa:

$$h(3-x) = -h(3+x) \iff h(3-x) + h(3+x) = 0$$

Evaluasi ruas kiri pertidaksamaan di atas menggunakan definisi fungsi  $h$ :

$$\begin{aligned} h(3-x) + h(3+x) &= (g(3-x) - 4) + (g(3+x) - 4) \\ &= g(3-x) + g(3+x) - 8 \end{aligned}$$

Gunakan identitas  $g(y) + g(6-y) = 8$ . Misalkan kita substitusikan  $y = 3-x$ . Maka argumen fungsi kedua menjadi:

$$6-y = 6-(3-x) = 3+x$$

Maka identitas fungsional tersebut menyatakan bahwa:

$$g(3-x) + g(3+x) = 8$$

Substitusikan kembali ke persamaan  $h(3-x) + h(3+x)$ :

$$h(3-x) + h(3+x) = 8 - 8 = 0 \implies h(3-x) = -h(3+x)$$

Jadi, terbukti bahwa grafik fungsi  $y = h(x)$  simetris terhadap titik  $(3, 0)$  (berperilaku seperti fungsi ganjil yang titik simetrinya digeser dari  $(0, 0)$  ke  $(3, 0)$ ).

**Soal 1.6. (5 Poin) Integral Tentu Aljabar Berpangkat**

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^1 x^2(2x^3 + 1)^4 dx$$

**Solusi Soal 1.6**

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Misalkan  $u = 2x^3 + 1$ . Maka turunan dari  $u$  terhadap  $x$  adalah:

$$du = 6x^2 dx \implies x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

Selanjutnya, tentukan batas integrasi yang baru untuk variabel  $u$ :

- Batas bawah: Jika  $x = 0$ , maka  $u = 2(0)^3 + 1 = 1$ .
- Batas atas: Jika  $x = 1$ , maka  $u = 2(1)^3 + 1 = 3$ .

Substitusikan variabel  $u$  dan batas barunya ke dalam integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2(2x^3 + 1)^4 dx &= \int_1^3 u^4 \cdot \left(\frac{1}{6} du\right) \\ &= \frac{1}{6} \int_1^3 u^4 du \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{u^5}{5} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{30} \left[ u^5 \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{30} (3^5 - 1^5) \\ &= \frac{1}{30} (243 - 1) = \frac{242}{30} = \boxed{\frac{121}{15}} \end{aligned}$$

**Soal 1.7. (5 Poin) Integral Eksponensial dan Fungsi Trigonometri Invers**

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{4e^x}{\sqrt{9 - e^{2x}}} dx$$

**Solusi Soal 1.7**

Tulis ulang suku di bawah akar kuadrat:  $e^{2x} = (e^x)^2$ . Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A) dengan memisalkan:

$$u = e^x \implies du = e^x dx$$

Substitusikan ke dalam integral:

$$\int \frac{4e^x}{\sqrt{9 - (e^x)^2}} dx = \int \frac{4}{\sqrt{9 - u^2}} du$$

Gunakan rumus integral standar nomor 13 dengan  $a = 3$ :

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

Maka integral di atas menjadi:

$$4 \sin^{-1} \left( \frac{u}{3} \right) + C$$

Substitusikan kembali  $u = e^x$  untuk mendapatkan hasil akhir:

$$4 \sin^{-1} \left( \frac{e^x}{3} \right) + C$$

### Soal 1.8. (5 Poin) Integral Substitusi Eksponensial

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int (t - 2)e^{-t^2 + 4t - 3} dt$$

#### Solusi Soal 1.8

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Perhatikan eksponen dari basis bilangan Euler:  $u = -t^2 + 4t - 3$ . Turunkan  $u$  terhadap  $t$ :

$$du = (-2t + 4) dt = -2(t - 2) dt \implies (t - 2) dt = -\frac{1}{2} du$$

Substitusikan ekspresi  $u$  dan  $du$  ke dalam integral:

$$\begin{aligned} \int (t - 2)e^{-t^2 + 4t - 3} dt &= \int e^u \cdot \left( -\frac{1}{2} du \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{2} e^u + C \end{aligned}$$

Kembalikan nilai variabel  $u$ :

$$-\frac{1}{2} e^{-t^2 + 4t - 3} + C$$

### Soal 1.9. (5 Poin) Integral Aljabar Pecahan dengan Pelengkapan Kuadrat

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$$

**Solusi Soal 1.9**

Lakukan pelengkapan kuadrat sempurna pada penyebut untuk mengarahkannya ke bentuk rumus integral standar invers tangen:

$$x^2 + 6x + 25 = (x^2 + 6x + 9) + 16 = (x + 3)^2 + 4^2$$

Substitusikan bentuk kuadrat sempurna ini ke dalam integral:

$$\int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 4^2}$$

Gunakan rumus integral standar nomor 14 dengan  $a = 4$  dan variabel integral linear  $u = x + 3 \implies du = dx$ :

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C$$

Maka diperoleh:

$$\boxed{\frac{1}{4} \tan^{-1} \left( \frac{x + 3}{4} \right) + C}$$

**Soal 1.10. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri Bernilai Mutlak dan Simetri**  
Evaluasi nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x |\sin x|}{4 + \cos^2 x} dx$$

(Petunjuk: Lakukan substitusi variabel  $u = x - \pi$ , kemudian manfaatkan sifat kesimetrisan fungsi ganjil/genap pada interval simetris  $[-\pi, \pi]$ ).

**Solusi Soal 1.10**

Misalkan  $I = \int_0^{2\pi} \frac{x |\sin x|}{4 + \cos^2 x} dx$ . Gunakan substitusi variabel  $u = x - \pi \implies x = u + \pi \implies dx = du$ . Ubah batas integrasi:

- Batas bawah: Jika  $x = 0$ , maka  $u = -\pi$ .
- Batas atas: Jika  $x = 2\pi$ , maka  $u = \pi$ .

Substitusikan ke integral  $I$ :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u + \pi) |\sin(u + \pi)|}{4 + \cos^2(u + \pi)} du$$

Gunakan identitas sudut berelasi trigonometri:

$$\sin(u + \pi) = -\sin u \implies |\sin(u + \pi)| = |-\sin u| = |\sin u|$$

$$\cos(u + \pi) = -\cos u \implies \cos^2(u + \pi) = (-\cos u)^2 = \cos^2 u$$

Substitusikan penyederhanaan ini kembali ke integral  $I$ :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(u + \pi) |\sin u|}{4 + \cos^2 u} du$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u|\sin u|}{4 + \cos^2 u} du}_{I_1} + \pi \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin u|}{4 + \cos^2 u} du}_{I_2}$$

Analisis masing-masing integral bagian:

• **Evaluasi  $I_1$ :**

Definisikan fungsi integrand:  $f(u) = \frac{u|\sin u|}{4 + \cos^2 u}$ . Selidiki sifat simetri fungsi  $f(u)$  dengan mengganti  $u$  dengan  $-u$ :

$$f(-u) = \frac{-u|\sin(-u)|}{4 + \cos^2(-u)} = \frac{-u|-\sin u|}{4 + \cos^2 u} = -\frac{u|\sin u|}{4 + \cos^2 u} = -f(u)$$

Karena  $f(-u) = -f(u)$ , maka  $f$  adalah **fungsi ganjil**. Sesuai sifat integral tentu pada batas simetris  $[-\pi, \pi]$ :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u|\sin u|}{4 + \cos^2 u} du = 0$$

• **Evaluasi  $I_2$ :**

Definisikan fungsi integrand:  $g(u) = \frac{|\sin u|}{4 + \cos^2 u}$ . Selidiki sifat simetri fungsi  $g(u)$ :

$$g(-u) = \frac{|\sin(-u)|}{4 + \cos^2(-u)} = \frac{|-\sin u|}{4 + \cos^2 u} = \frac{|\sin u|}{4 + \cos^2 u} = g(u)$$

Karena  $g(-u) = g(u)$ , maka  $g$  adalah **fungsi genap**. Sesuai sifat integral tentu untuk fungsi genap pada selang simetris:

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin u|}{4 + \cos^2 u} du = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{4 + \cos^2 u} du$$

Pada interval  $[0, \pi]$ , fungsi sinus selalu bernilai non-negatif, sehingga kita dapat menghilangkan tanda mutlak:  $|\sin u| = \sin u$ .

$$I_2 = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{4 + \cos^2 u} du$$

Untuk menyelesaikan integral ini, gunakan substitusi  $w = \cos u \implies dw = -\sin u du \implies \sin u du = -dw$ . Batas integrasi dalam variabel  $w$ :

- Batas bawah: Jika  $u = 0$ , maka  $w = \cos 0 = 1$ .
- Batas atas: Jika  $u = \pi$ , maka  $w = \cos \pi = -1$ .

Substitusikan batas baru dan variabel  $w$ :

$$I_2 = 2 \int_1^{-1} \frac{-dw}{4 + w^2} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dw}{2^2 + w^2}$$

Gunakan rumus integral standar nomor 14 dengan  $a = 2$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \left[ \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{w}{2} \right) \right]_{-1}^1 \\ &= \left[ \tan^{-1} \left( \frac{w}{2} \right) \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Karena fungsi arctan adalah fungsi ganjil ( $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$ ), maka:

$$I_2 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Kembalikan ke integral gabungan awal  $I$ :

$$I = I_1 + \pi I_2 = 0 + \pi \left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{2\pi \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

## Topik 2: Integral Trigonometri dan Substitusi Sederhana

(50 Poin)

### Soal 2.1. (5 Poin) Integral Substitusi dengan Pelengkapan Kuadrat Sempurna

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4\sin x + 5} dx$$

#### Solusi Soal 2.1

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Misalkan  $u = \sin x \implies du = \cos x dx$ . Substitusikan ke dalam integral:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4\sin x + 5} dx = \int \frac{du}{u^2 - 4u + 5}$$

Sekarang lakukan pelengkapan kuadrat sempurna pada penyebut:

$$u^2 - 4u + 5 = (u^2 - 4u + 4) + 1 = (u - 2)^2 + 1$$

Sehingga integral menjadi:

$$\int \frac{du}{(u - 2)^2 + 1}$$

Gunakan rumus integral standar nomor 14 dengan  $a = 1$  dan variabel integral  $(u - 2)$ :

$$\int \frac{dw}{w^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{w}{a}\right) + C$$

Maka integral di atas menghasilkan:

$$\tan^{-1}(u - 2) + C$$

Substitusikan kembali  $u = \sin x$  untuk memperoleh jawaban dalam variabel asli  $x$ :

$$\boxed{\tan^{-1}(\sin x - 2) + C}$$

**Soal 2.2. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri dengan Sifat Refleksi Selang**  
Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

(Petunjuk: Gunakan substitusi  $u = \frac{\pi}{2} - x$ , lalu jumlahkan integral awal dengan integral yang baru diperoleh).

### Solusi Soal 2.2

Diberikan integral:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad \text{--- (Persamaan 1)}$$

Gunakan substitusi  $u = \frac{\pi}{2} - x \implies dx = -du$ . Batas integrasi berubah menjadi:

- Batas bawah: Jika  $x = 0$ , maka  $u = \frac{\pi}{2}$ .
- Batas atas: Jika  $x = \frac{\pi}{2}$ , maka  $u = 0$ .

Substitusikan ke integral  $I$ :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}} (-du)$$

Gunakan sifat integral tentu  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$  untuk membalik batas integral dan menghilangkan tanda negatif dari  $du$ :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}} du$$

Gunakan identitas trigonometri sudut berelasi (ko-fungsi):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \quad \text{dan} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$$

Sehingga integral menjadi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du$$

Ubah kembali variabel boneka  $u$  menjadi  $x$ :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad \text{--- (Persamaan 2)}$$

Jumlahkan Persamaan 1 dan Persamaan 2:

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\
2I &= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \\
I &= \boxed{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

**Soal 2.3. (5 Poin) Eksplorasi Antiderivatif Setara Lewat Berbagai Jalur**

Seringkali dalam pengintegralan fungsi trigonometri, beberapa metode berbeda menghasilkan bentuk antiderivatif yang terlihat berbeda secara visual tetapi sebenarnya setara (hanya berbeda sebuah konstanta integrasi). Evaluasi integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

dengan menggunakan minimal **dua cara** dari tiga cara yang diusulkan di bawah ini, kemudian tunjukkan bahwa jawaban-jawaban tersebut memang setara!

- **Cara 1:** Gunakan identitas sudut ganda untuk menyederhanakan penyebut terlebih dahulu menjadi bentuk  $\cos^2(2x)$ , lalu lakukan substitusi  $u = \cos(2x)$ .
- **Cara 2:** Lakukan substitusi langsung  $v = \cos^2 x \implies dv = -\sin(2x) dx$ , dan nyatakan penyebut dalam variabel  $v$ .
- **Cara 3:** Bagi pembilang dan penyebut dengan  $\cos^4 x$ , nyatakan integral dalam fungsi  $\tan x$ , lalu lakukan substitusi  $w = \tan^2 x$ .

**Solusi Soal 2.3**

Berikut adalah pengerjaan lengkap untuk ketiga cara tersebut beserta bukti kesetaraannya.

**Cara 1: Menyederhanakan Penyebut dengan Sudut Ganda** Sederhanakan penyebut menggunakan identitas kuadrat:

$$\begin{aligned}
\cos^4 x + \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\
&= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 \\
&= 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \sin(2x) \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)
\end{aligned}$$

Kalikan pembilang dan penyebut integral dengan 2:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{2 \sin(2x)}{2 - \sin^2(2x)} dx$$

Gunakan identitas  $\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x)$ :

$$2 - \sin^2(2x) = 2 - (1 - \cos^2(2x)) = 1 + \cos^2(2x)$$

Sehingga integral menjadi:

$$\int \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos^2(2x)} dx$$

Misalkan  $u = \cos(2x) \implies du = -2 \sin(2x) dx \implies 2 \sin(2x) dx = -du$ . Substitusikan:

$$\int \frac{-du}{1 + u^2} = -\tan^{-1}(u) + C_1 = \boxed{-\tan^{-1}(\cos(2x)) + C_1}$$

**Cara 2: Substitusi Langsung**  $v = \cos^2 x$  Misalkan  $v = \cos^2 x$ . Turunannya adalah:

$$dv = 2 \cos x (-\sin x) dx = -2 \sin x \cos x dx = -\sin(2x) dx \implies \sin(2x) dx = -dv$$

Gunakan hubungan  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - v$ . Penyebut dapat dinyatakan sebagai:

$$\cos^4 x + \sin^4 x = v^2 + (1 - v)^2 = 2v^2 - 2v + 1$$

Substitusikan ke integral:

$$\int \frac{-dv}{2v^2 - 2v + 1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 - v + \frac{1}{2}}$$

Lakukan pelengkapan kuadrat pada penyebut:

$$v^2 - v + \frac{1}{2} = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Gunakan rumus integral arctan standar (nomor 14) dengan  $a = \frac{1}{2}$  dan variabel  $(v - \frac{1}{2})$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \frac{dv}{\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \left( \frac{v - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \right) + C_2 \\ &= -\tan^{-1}(2v - 1) + C_2 \end{aligned}$$

Kembalikan nilai  $v = \cos^2 x$ :

$$\boxed{-\tan^{-1}(2 \cos^2 x - 1) + C_2}$$

Perhatikan bahwa karena  $2 \cos^2 x - 1 = \cos(2x)$  (identitas sudut ganda cosinus), jawaban ini adalah:

$$-\tan^{-1}(\cos(2x)) + C_2$$

yang identik secara presisi dengan hasil Cara 1 (dengan  $C_1 = C_2$ ).

**Cara 3: Pembagian dengan  $\cos^4 x$  dan Substitusi Tangen** Tulis  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ . Bagi pembilang dan penyebut integral dengan  $\cos^4 x$ :

$$\int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x}}{\frac{\cos^4 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}} dx = \int \frac{2 \tan x \sec^2 x}{1 + \tan^4 x} dx$$

Misalkan  $w = \tan^2 x \implies dw = 2 \tan x \sec^2 x dx$ . Substitusikan:

$$\int \frac{dw}{1 + w^2} = \boxed{\tan^{-1}(\tan^2 x) + C_3}$$

**Membuktikan Kesetaraan Cara 1, 2, dan Cara 3:** Kita ingin membuktikan kesetaraan antara  $-\tan^{-1}(\cos(2x)) + C_1$  dan  $\tan^{-1}(\tan^2 x) + C_3$ . Gunakan identitas sudut ganda cosinus dalam bentuk tangen:

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

Misalkan  $y = \tan^2 x$ . Kita ingin menyederhanakan  $-\tan^{-1}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$ . Gunakan identitas selisih sudut pada arctan:

$$\tan^{-1}(A) - \tan^{-1}(B) = \tan^{-1}\left(\frac{A - B}{1 + AB}\right)$$

Jika kita pilih  $A = 1$  dan  $B = y$ , maka:

$$\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right)$$

Karena  $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ , maka:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1 - y}{1 + y}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(y)$$

Kalikan dengan  $-1$  di kedua sisi:

$$-\tan^{-1}(\cos(2x)) = -\tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right) = -\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}(\tan^2 x)\right) = \tan^{-1}(\tan^2 x) - \frac{\pi}{4}$$

Oleh karena itu:

$$-\tan^{-1}(\cos(2x)) + C_1 = \tan^{-1}(\tan^2 x) + \left(C_1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Dengan menetapkan konstanta  $C_3 = C_1 - \frac{\pi}{4}$ , kedua fungsi antiderivatif tersebut terbukti setara.

#### Soal 2.4. (5 Poin) Integral Tentu Fungsi Trigonometri Bernilai Mutlak

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{\pi} \left| \cos x + \frac{1}{2} \right| dx$$

Jelaskan analisis Anda untuk menentukan titik pemisahan interval integrasi akibat adanya tanda nilai mutlak tersebut.

#### Solusi Soal 2.4

Untuk menyelesaikan integral fungsi bernilai mutlak, pertama-tama tentukan titik pembuat nol dari fungsi di dalam nilai mutlak pada interval integrasi  $[0, \pi]$ :

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \implies \cos x = -\frac{1}{2}$$

Pada interval  $[0, \pi]$ , nilai  $x$  yang memenuhi adalah:

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

Selidiki tanda dari ekspresi  $\cos x + \frac{1}{2}$  pada kedua sub-interval:

- Untuk  $0 \leq x < \frac{2\pi}{3}$ : nilai  $\cos x > -\frac{1}{2}$ , sehingga  $\cos x + \frac{1}{2} > 0$ . Maka:

$$\left| \cos x + \frac{1}{2} \right| = \cos x + \frac{1}{2}$$

- Untuk  $\frac{2\pi}{3} < x \leq \pi$ : nilai  $\cos x < -\frac{1}{2}$ , sehingga  $\cos x + \frac{1}{2} < 0$ . Maka:

$$\left| \cos x + \frac{1}{2} \right| = -\left( \cos x + \frac{1}{2} \right) = -\cos x - \frac{1}{2}$$

Pecah integral tentu menjadi dua bagian berdasarkan batas tersebut:

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left( -\cos x - \frac{1}{2} \right) dx$$

Evaluasi integral masing-masing bagian:

a) Bagian pertama:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \cos x + \frac{1}{2} \right) dx &= \left[ \sin x + \frac{1}{2}x \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \left( \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) - (0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b) Bagian kedua:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left( -\cos x - \frac{1}{2} \right) dx &= \left[ -\sin x - \frac{1}{2}x \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \left( -\sin(\pi) - \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= \left( 0 - \frac{\pi}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Jumlahkan kedua bagian tersebut:

$$\begin{aligned} I &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{2\pi - \pi}{6} \right) \\ &= \boxed{\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

**Soal 2.5. (5 Poin) Integrasi Fungsi Trigonometri Menggunakan Sifat Konjugat**  
Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

dengan menggunakan cara manipulasi perkalian konjugat pembilang-penyebut, kemudian verifikasi bahwa hasil tersebut dapat juga diperoleh dengan menggunakan rumus identitas trigonometri setengah sudut.

### Solusi Soal 2.5

**Metode 1: Perkalian Konjugat** Kalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat penyebut, yaitu  $(1 - \sin x)$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \end{aligned}$$

Gunakan rumus integral standar nomor 7 ( $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ ) dan nomor 9 ( $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ ):

$$\boxed{\tan x - \sec x + C}$$

**Metode 2: Menggunakan Rumus Setengah Sudut** Gunakan hubungan identitas  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  dan rumus setengah sudut  $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \implies 1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$ :

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Substitusikan ke integral:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \int \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) dx$$

Gunakan substitusi linear sederhana  $u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \implies du = -\frac{1}{2} dx \implies dx = -2 du$ . Substitusikan:

$$\frac{1}{2} \int \sec^2(u)(-2 du) = - \int \sec^2 u du = -\tan u + C = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$$

**Verifikasi Kesetaraan:** Kita ingin membuktikan bahwa  $\tan x - \sec x = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ . Evaluasi ruas kanan dengan identitas selisih sudut untuk tangen:

$$-\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}$$

Nyatakan dalam bentuk sinus dan cosinus sudut setengah ( $\frac{x}{2}$ ):

$$\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} - 1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + 1} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{--- (Persamaan A)}$$

Sekarang, nyatakan ruas kiri  $\tan x - \sec x$  dalam sudut setengah menggunakan rumus sudut ganda:

$$\begin{aligned} \tan x - \sec x &= \frac{\sin x - 1}{\cos x} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) - (\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right))}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{-\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{--- (Persamaan B)} \end{aligned}$$

Karena Persamaan A sama dengan Persamaan B, maka terbukti bahwa kedua metode menghasilkan antiderivatif yang identik.

### Sol 2.6. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri Tangen-Sekan

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx$$

#### Solusi Soal 2.6

Tulis ulang integral menggunakan identitas sekan  $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^2 x dx$$

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Misalkan  $u = \tan x \implies du = \sec^2 x dx$ . Tentukan batas integrasi yang baru untuk variabel  $u$ :

- Batas bawah: Jika  $x = 0$ , maka  $u = \tan 0 = 0$ .
- Batas atas: Jika  $x = \frac{\pi}{4}$ , maka  $u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

Substitusikan batas baru dan variabel  $u$  ke dalam integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \sec^2 x \, dx &= \int_0^1 u^3 \, du \\ &= \left[ \frac{u^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

### Soal 2.7. (5 Poin) Integral Substitusi Logaritma Natural dan Sekan Kuadrat

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sec^2(\ln(2x^2))}{x} \, dx$$

#### Solusi Soal 2.7

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Perhatikan argumen dari fungsi sekan kuadrat:  $u = \ln(2x^2)$ . Turunkan  $u$  terhadap  $x$  menggunakan aturan rantai:

$$du = \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2) \, dx = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x \, dx = \frac{2}{x} \, dx \implies \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \, du$$

Substitusikan ekspresi  $u$  dan  $du$  ke dalam integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2(\ln(2x^2))}{x} \, dx &= \int \sec^2(u) \cdot \left( \frac{1}{2} \, du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 u \, du\end{aligned}$$

Gunakan rumus integral standar nomor 7:  $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$ .

$$\frac{1}{2} \tan u + C$$

Substitusikan kembali nilai variabel  $u$ :

$$\boxed{\frac{1}{2} \tan(\ln(2x^2)) + C}$$

### Soal 2.8. (5 Poin) Sederhanakan Identitas Sebelum Integrasi Substitusi

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\cos(3t+2)}{1-\cos^2(3t+2)} \, dt$$

**Solusi Soal 2.8**

Pertama, gunakan identitas Pythagoras trigonometri dasar  $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$  untuk menyederhanakan penyebut:

$$\int \frac{\cos(3t+2)}{1 - \cos^2(3t+2)} dt = \int \frac{\cos(3t+2)}{\sin^2(3t+2)} dt$$

Nyatakan integrand sebagai perkalian fungsi kosekan dan kotangen:

$$\frac{\cos(3t+2)}{\sin^2(3t+2)} = \frac{1}{\sin(3t+2)} \cdot \frac{\cos(3t+2)}{\sin(3t+2)} = \csc(3t+2) \cot(3t+2)$$

Sehingga integral menjadi:

$$\int \csc(3t+2) \cot(3t+2) dt$$

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A) dengan memisalkan:

$$u = 3t + 2 \implies du = 3 dt \implies dt = \frac{1}{3} du$$

Substitusikan:

$$\int \csc(3t+2) \cot(3t+2) dt = \int \csc u \cot u \cdot \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{3} \int \csc u \cot u du$$

Gunakan rumus integral standar nomor 10:  $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$ .

$$-\frac{1}{3} \csc u + C$$

Substitusikan kembali nilai  $u = 3t + 2$ :

$$\boxed{-\frac{1}{3} \csc(3t+2) + C}$$

**Soal 2.9. (5 Poin) Integral Substitusi Tangen-Sekan dengan Akar Kuadrat**

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sec^2(3x)}{\sqrt{4 + \tan(3x)}} dx$$

**Solusi Soal 2.9**

Gunakan Teorema Substitusi (Teorema A). Misalkan bagian di bawah akar kuadrat adalah  $u$ :

$$u = 4 + \tan(3x)$$

Turunkan  $u$  terhadap  $x$  dengan aturan rantai:

$$du = 3 \sec^2(3x) dx \implies \sec^2(3x) dx = \frac{1}{3} du$$

Substitusikan ke dalam integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2(3x)}{\sqrt{4 + \tan(3x)}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{u} + C\end{aligned}$$

Kembalikan nilai variabel  $u$ :

$$\boxed{\frac{2}{3} \sqrt{4 + \tan(3x)} + C}$$

**Soal 2.10. (5 Poin) Pembuktian Rumus Integral Kosekan melalui Identitas Aljabar**

Suku integrasi  $\csc x$  seringkali sulit diintegrasikan tanpa manipulasi trik khusus. Soal ini menyajikan alternatif pembuktian rumus integral standar  $\csc x$ .

- a) Buktikan secara aljabar/trigonometri identitas berikut untuk setiap  $x$  di mana fungsi tersebut terdefinisi:

$$\csc x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

- b) Gunakan identitas di atas bersama dengan Teorema Substitusi (Teorema A) untuk membuktikan rumus integral berikut:

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

**Solusi Soal 2.10**

- a) **Membuktikan Identitas Trigonometri:**

Sederhanakan ruas kanan:

$$\text{Ruas Kanan} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Samakan penyebutnya:

$$\frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

Gunakan identitas Pythagoras  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  pada pembilang:

$$\frac{\cos x + 1}{\sin x(1 + \cos x)}$$

Karena  $\cos x + 1 = 1 + \cos x$ , kita dapat mencoret faktor  $(1 + \cos x)$  pada pembilang dan penyebut (syarat  $\cos x \neq -1$ ):

$$\frac{1}{\sin x} = \csc x = \text{Ruas Kiri}$$

(Terbukti).

b) **Membuktikan Rumus Integral:**

Substitusikan identitas dari bagian (a) ke dalam integral:

$$\int \csc x \, dx = \int \left( \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

Selesaikan masing-masing integral dengan Teorema Substitusi (Teorema A):

- Integral pertama:  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ . Misalkan  $p = \sin x \implies dp = \cos x \, dx$ .

$$\int \frac{dp}{p} = \ln |p| = \ln |\sin x|$$

- Integral kedua:  $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ . Misalkan  $q = 1 + \cos x \implies dq = -\sin x \, dx \implies \sin x \, dx = -dq$ .

$$\int \frac{-dq}{q} = -\ln |q| = -\ln |1 + \cos x|$$

Gabungkan kedua hasil tersebut:

$$\int \csc x \, dx = \ln |\sin x| - \ln |1 + \cos x| + C = \ln \left| \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right| + C \quad \text{— (Persamaan A)}$$

Sekarang, sederhanakan ekspresi di dalam nilai mutlak yang ingin dibuktikan:

$$\csc x - \cot x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Kalikan pembilang dan penyebut dengan  $(1 + \cos x)$  untuk memunculkan bentuk kuadrat:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} &= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad \text{— (Persamaan B)} \end{aligned}$$

Karena Persamaan B menunjukkan bahwa  $\csc x - \cot x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ , kita dapat mengganti argumen logaritma pada Persamaan A:

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

(Terbukti).

## LAMPIRAN: TABEL RUMUS INTEGRAL STANDAR & TEOREMA SUBSTITUSI

### Teorema A: Substitusi dalam Integral Tak Tentu

Misalkan  $g$  adalah fungsi yang terdiferensialkan dan  $F$  adalah antiturunan dari  $f$ . Jika  $u = g(x)$ , maka:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

### Daftar Rumus Integral Standar

- |                                                                                                            |                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int k du = ku + C$                                                                                    | 9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$                                                |
| 2. $\int u^r du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, & r \neq -1 \\ \ln  u  + C, & r = -1 \end{cases}$ | 10. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$                                              |
| 3. $\int e^u du = e^u + C$                                                                                 | 11. $\int \tan u du = -\ln  \cos u  + C$                                               |
| 4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a \neq 1, a > 0)$                                           | 12. $\int \cot u du = \ln  \sin u  + C$                                                |
| 5. $\int \sin u du = -\cos u + C$                                                                          | 13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C$      |
| 6. $\int \cos u du = \sin u + C$                                                                           | 14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) + C$ |
| 7. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$                                                                         | 16. $\int \sinh u du = \cosh u + C$                                                    |
| 8. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$                                                                        | 17. $\int \cosh u du = \sinh u + C$                                                    |