

PR 4
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA

Topik: Integral 1

Dikumpul: Kamis, 16 Juli 2026, Jam 19:30 WIB (Sebelum Kuis 4)

Petunjuk Umum Pengerjaan PR:

1. **Penggunaan Perangkat Kecerdasan Buatan (AI):** Penggunaan peralatan berbasis Kecerdasan Buatan (Artificial Intelligence/AI) **diperbolehkan hanya sebagai sarana bantu belajar**. Kendati demikian, setiap mahasiswa **bertanggung jawab penuh secara akademis** untuk memahami isi, alur logika, dan kebenaran matematis dari jawaban yang dituliskan.
2. **Langkah Pengerjaan:** Tuliskan seluruh langkah penyelesaian soal secara **jelas, runtut, dan lengkap**. Jawaban akhir tanpa disertai argumen atau langkah matematis yang memadai **tidak akan mendapatkan nilai penuh**. **Mahasiswa wajib memberikan kotak atau highlight (stabilo) pada jawaban akhir dari setiap nomor.**
3. **Pengumpulan Berkas:** Jawaban **wajib berupa tulisan tangan secara rapi** (baik ditulis fisik di atas kertas A4 lalu dipindai/scan, maupun ditulis secara digital menggunakan tablet/stylus). Hasil pekerjaan harus disimpan sebagai **satu berkas PDF tunggal yang jelas dan terbaca**, kemudian diunggah melalui platform **SCELE** sebelum tenggat waktu yang ditentukan. Format penamaan berkas yang dikumpulkan adalah `KODEASDOS_NamaLengkap_NPM_PR4.pdf` (contoh: `RSA_GeoffreyHinton_2501233211_PR4.pdf`).
4. **Konsekuensi Keterlambatan:** Batas waktu pengumpulan berkas di SCELE bersifat **mutlak**. Keterlambatan pengumpulan akan dikenai penalti pengurangan nilai sebesar **10% per jam keterlambatan** dari nilai total yang diperoleh.
5. **Integritas Akademik:** Junjung tinggi nilai kejujuran. Segala bentuk kecurangan akademik, plagiarisme, maupun kerja sama tidak sah antar-mahasiswa akan berakibat pada pemberian **nilai nol (0) secara langsung** untuk tugas ini.

Topik 1: Integral Tak Tentu dan Tentu

(50 Poin)

Soal 1.1. (5 Poin) Aplikasi Konstanta Integrasi dan Kekontinuan Fisik

Sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus dengan percepatan $a(t)$ yang didefinisikan sebagai fungsi pias (piecewise) berikut:

$$a(t) = \begin{cases} 4t - 2, & 0 \leq t < 2 \\ 6e^{2-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

dengan t dalam detik dan $a(t)$ dalam m/s^2 . Diketahui bahwa pada saat awal $t = 0$, partikel berada di posisi $s(0) = 3$ meter dengan kecepatan awal $v(0) = -1$ m/s.

- a) Tentukan fungsi kecepatan $v(t)$ untuk $t \geq 0$ dan tunjukkan secara formal menggunakan konsep limit bahwa $v(t)$ kontinu di $t = 2$.
- b) Tentukan fungsi posisi $s(t)$ untuk $t \geq 0$, tunjukkan bahwa $s(t)$ kontinu di $t = 2$, dan hitung posisi partikel pada saat $t = 3$ detik.

- c) Tentukan apakah partikel pernah berbalik arah (kecepatan bernilai nol) selama perjalanannya untuk $t \geq 0$. Jika ya, tentukan waktu t tersebut.

Soal 1.2. (5 Poin) Persamaan Integral, Teorema Dasar Kalkulus I, dan Aturan Rantai

Diberikan fungsi kontinu $f : [-\frac{1}{4}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan integral berikut untuk setiap $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{x^2-x} f(t) dt = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$$

- a) Tentukan rumus fungsi definitif $f(y)$ untuk domain $y \geq -\frac{1}{4}$.
 b) Menggunakan rumus fungsi $f(y)$ yang diperoleh pada bagian (a), hitunglah nilai dari integral tentu:

$$\int_{-\frac{1}{4}}^2 f(t) dt$$

Soal 1.3. (5 Poin) Mengapit Nilai Integral dengan Sifat Perbandingan

Sifat perbandingan integral menyatakan bahwa jika $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$. Gunakan sifat tersebut untuk membuktikan pertidaksamaan integral berikut:

$$\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 x}} dx \leq \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

(Petunjuk: Analisis batas-batas nilai fungsi sinus pada selang $[0, \frac{\pi}{6}]$).

Soal 1.4. (5 Poin) Sifat Integral Tentu: Simetri Fungsi dan Interpretasi Geometri Area

Tanpa mencari rumus antiturunan (integral tak tentu) dari masing-masing suku secara aljabar langsung, hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_{-2}^2 \left(x^5 \cos(x^2) + \sqrt{4-x^2} \right) dx$$

Jelaskan secara rinci argumen teoretis (simetri fungsi ganjil/genap) dan geometri (luas daerah kurva standar) yang Anda gunakan untuk menyelesaikan integral tersebut.

Soal 1.5. (5 Poin) Sifat Pergeseran Integrasi dan Simetri Titik

Suatu fungsi kontinu g terdefinisi untuk setiap bilangan riil x dan memenuhi persamaan fungsional berikut:

$$g(x) + g(6-x) = 8$$

a) Buktikan bahwa nilai integral tentu berikut adalah 16:

$$\int_1^5 g(x) \, dx = 16$$

b) Jika didefinisikan sebuah fungsi baru $h(x) = g(x) - 4$, tunjukkan bahwa grafik fungsi $y = h(x)$ simetris terhadap titik asal pergeseran $(3, 0)$ (yang secara matematis berarti menunjukkan bahwa $h(3 - x) = -h(3 + x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$).

Soal 1.6. (5 Poin) Integral Tentu Aljabar Berpangkat

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^1 x^2(2x^3 + 1)^4 \, dx$$

Soal 1.7. (5 Poin) Integral Eksponensial dan Fungsi Trigonometri Invers

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{4e^x}{\sqrt{9 - e^{2x}}} \, dx$$

Soal 1.8. (5 Poin) Integral Substitusi Eksponensial

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int (t - 2)e^{-t^2 + 4t - 3} \, dt$$

Soal 1.9. (5 Poin) Integral Aljabar Pecahan dengan Pelengkapan Kuadrat

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$$

Soal 1.10. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri Bernilai Mutlak dan Simetri

Evaluasi nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x |\sin x|}{4 + \cos^2 x} \, dx$$

(Petunjuk: Lakukan substitusi variabel $u = x - \pi$, kemudian manfaatkan sifat kesimetrisan fungsi ganjil/genap pada interval simetris $[-\pi, \pi]$).

Topik 2: Integral Trigonometri dan Substitusi Sederhana**(50 Poin)**

Soal 2.1. (5 Poin) Integral Substitusi dengan Pelengkapan Kuadrat Sempurna
Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 4 \sin x + 5} dx$$

Soal 2.2. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri dengan Sifat Refleksi Selang
Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

(Petunjuk: Gunakan substitusi $u = \frac{\pi}{2} - x$, lalu jumlahkan integral awal dengan integral yang baru diperoleh).

Soal 2.3. (5 Poin) Eksplorasi Antiderivatif Setara Lewat Berbagai Jalur

Seringkali dalam pengintegralan fungsi trigonometri, beberapa metode berbeda menghasilkan bentuk antiderivatif yang terlihat berbeda secara visual tetapi sebenarnya setara (hanya berbeda sebuah konstanta integrasi). Evaluasi integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

dengan menggunakan minimal **dua cara** dari tiga cara yang diusulkan di bawah ini, kemudian tunjukkan bahwa jawaban-jawaban tersebut memang setara!

- **Cara 1:** Gunakan identitas sudut ganda untuk menyederhanakan penyebut terlebih dahulu menjadi bentuk $\cos^2(2x)$, lalu lakukan substitusi $u = \cos(2x)$.
- **Cara 2:** Lakukan substitusi langsung $v = \cos^2 x \implies dv = -\sin(2x) dx$, dan nyatakan penyebut dalam variabel v .
- **Cara 3:** Bagi pembilang dan penyebut dengan $\cos^4 x$, nyatakan integral dalam fungsi $\tan x$, lalu lakukan substitusi $w = \tan^2 x$.

Soal 2.4. (5 Poin) Integral Tentu Fungsi Trigonometri Bernilai Mutlak

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{\pi} \left| \cos x + \frac{1}{2} \right| dx$$

Jelaskan analisis Anda untuk menentukan titik pemisahan interval integrasi akibat adanya tanda nilai mutlak tersebut.

Soal 2.5. (5 Poin) Integrasi Fungsi Trigonometri Menggunakan Sifat Konjugat
Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

dengan menggunakan cara manipulasi perkalian konjugat pembilang-penyebut, kemudian verifikasi bahwa hasil tersebut dapat juga diperoleh dengan menggunakan rumus identitas trigonometri setengah sudut.

Soal 2.6. (5 Poin) Integral Tentu Trigonometri Tangen-Sekan

Hitunglah nilai dari integral tentu berikut:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx$$

Soal 2.7. (5 Poin) Integral Substitusi Logaritma Natural dan Sekan Kuadrat

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sec^2(\ln(2x^2))}{x} dx$$

Soal 2.8. (5 Poin) Sederhanakan Identitas Sebelum Integrasi Substitusi

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\cos(3t + 2)}{1 - \cos^2(3t + 2)} dt$$

Soal 2.9. (5 Poin) Integral Substitusi Tangen-Sekan dengan Akar Kuadrat

Tentukan hasil dari integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{\sec^2(3x)}{\sqrt{4 + \tan(3x)}} dx$$

Soal 2.10. (5 Poin) Pembuktian Rumus Integral Kosekan melalui Identitas Aljabar

Suku integrasi $\csc x$ seringkali sulit diintegrasikan tanpa manipulasi trik khusus. Soal ini menyajikan alternatif pembuktian rumus integral standar $\csc x$.

- a) Buktikan secara aljabar/trigonometri identitas berikut untuk setiap x di mana fungsi tersebut terdefinisi:

$$\csc x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

- b) Gunakan identitas di atas bersama dengan Teorema Substitusi (Teorema A) untuk

membuktikan rumus integral berikut:

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

LAMPIRAN: TABEL RUMUS INTEGRAL STANDAR & TEOREMA SUBSTITUSI

Teorema A: Substitusi dalam Integral Tak Tentu

Misalkan g adalah fungsi yang terdiferensialkan dan F adalah antiturunan dari f . Jika $u = g(x)$, maka:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Daftar Rumus Integral Standar

- | | |
|--|--|
| 1. $\int k du = ku + C$ | 9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ |
| 2. $\int u^r du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C, & r \neq -1 \\ \ln u + C, & r = -1 \end{cases}$ | 10. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$ |
| 3. $\int e^u du = e^u + C$ | 11. $\int \tan u du = -\ln \cos u + C$ |
| 4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a \neq 1, a > 0)$ | 12. $\int \cot u du = \ln \sin u + C$ |
| 5. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ |
| 6. $\int \cos u du = \sin u + C$ | 14. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + C$ |
| 7. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$ | 16. $\int \sinh u du = \cosh u + C$ |
| 8. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$ | 17. $\int \cosh u du = \sinh u + C$ |

Pertanyaan Refleksi

Setelah menyelesaikan seluruh Pekerjaan Rumah ini, luangkan waktu sejenak untuk merefleksikan dan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

- a) Bagian materi atau konsep mana dalam PR ini yang Anda rasakan paling menantang/sulit? Mengapa konsep tersebut terasa sulit bagi Anda?
- b) Strategi belajar atau sumber daya bantuan apa yang Anda gunakan dan terbukti paling efektif membantu Anda untuk memahami konsep yang menantang tersebut?
- c) Berikan penilaian mandiri terhadap tingkat pemahaman Anda untuk topik minggu

ini pada skala 1–10 (1 = tidak paham sama sekali, 10 = paham sepenuhnya). Berikan alasan singkat di balik penilaian tersebut.

**Bagian refleksi ini wajib diisi sebagai komitmen proses belajar mandiri Anda dan akan digunakan oleh Asisten Dosen untuk memetakan kebutuhan pemahaman kelas asistensi berikutnya.*