

PR 3
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA
Topik: Turunan dan Aplikasi

Topik 1: Teorema Nilai Rata-rata

(15 Poin)

Soal 1.1. Diberikan fungsi

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + x, \quad x \in [-2, 2].$$

Tunjukkan bahwa syarat Teorema Nilai Rata-rata terpenuhi pada interval $[-2, 2]$, lalu tentukan semua nilai $c \in (-2, 2)$ yang memenuhi

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}.$$

Setelah itu, jelaskan secara singkat makna geometris dari semua nilai c yang diperoleh.

Solusi Soal 1.1

Fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$ adalah polinomial, sehingga kontinu pada $[-2, 2]$ dan terdiferensialkan pada $(-2, 2)$. Maka syarat Teorema Nilai Rata-rata terpenuhi. Hitung kemiringan garis sekan:

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{10 - 6}{4} = 1.$$

Karena

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 1,$$

maka titik c yang dicari memenuhi

$$f'(c) = 1.$$

Jadi

$$\begin{aligned} 4c^3 - 4c + 1 &= 1 \\ 4c^3 - 4c &= 0 \\ 4c(c^2 - 1) &= 0 \\ 4c(c - 1)(c + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$c = -1, 0, 1.$$

Secara geometris, pada ketiga nilai c tersebut, garis singgung grafik $y = f(x)$ sejajar dengan garis sekan yang menghubungkan titik ujung $(-2, f(-2))$ dan $(2, f(2))$.

Soal 1.2. Untuk $0 \leq x \leq e$, didefinisikan fungsi pias

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x + b, & 1 < x \leq e. \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b agar Teorema Nilai Rata-rata berlaku pada interval $[0, e]$. Setelah itu, tentukan semua nilai $c \in (0, e)$ yang dijamin oleh Teorema Nilai Rata-rata.

Solusi Soal 1.2

Agar Teorema Nilai Rata-rata berlaku pada $[0, e]$, fungsi harus kontinu pada $[0, e]$ dan terdiferensialkan pada $(0, e)$. Karena fungsi pias hanya berpotensi bermasalah di $x = 1$, cukup periksa titik tersebut.

Syarat kontinu di $x = 1$:

$$1 + a = b.$$

Syarat terdiferensialkan di $x = 1$:

$$2 + a = 1.$$

Dari persamaan kedua diperoleh

$$a = -1.$$

Substitusi ke $b = 1 + a$ menghasilkan

$$b = 0.$$

Jadi

$$\boxed{a = -1, \quad b = 0}.$$

Dengan demikian,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq e. \end{cases}$$

Berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata, terdapat $c \in (0, e)$ sehingga

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(0)}{e - 0}.$$

Karena $f(e) = 1$ dan $f(0) = 0$, maka

$$f'(c) = \frac{1}{e}.$$

Untuk $0 < c < 1$,

$$f'(c) = 2c - 1.$$

Maka

$$2c - 1 = \frac{1}{e} \implies c = \frac{1 + \frac{1}{e}}{2}.$$

Untuk $1 < c < e$,

$$f'(c) = \frac{1}{c}.$$

Persamaan

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e}$$

memberi $c = e$, tetapi $e \notin (0, e)$, sehingga tidak valid.

Jadi nilai yang memenuhi adalah

$$\boxed{c = \frac{1 + \frac{1}{e}}{2}}.$$

Soal 1.3. Sebuah kendaraan bergerak pada lintasan lurus dengan fungsi posisi

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 2, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

dengan $s(t)$ dalam meter dan t dalam detik.

- Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk menjamin adanya waktu ketika kecepatan sesaat sama dengan kecepatan rata-rata pada interval $[0, 4]$.
- Tentukan semua waktu tersebut.
- Jelaskan mengapa dalam kasus ini waktu tersebut tidak hanya satu.

Solusi Soal 1.3

Fungsi

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 2$$

adalah polinomial, sehingga kontinu pada $[0, 4]$ dan terdiferensialkan pada $(0, 4)$. Maka Teorema Nilai Rata-rata berlaku.

Kecepatan rata-rata pada interval $[0, 4]$ adalah

$$\frac{s(4) - s(0)}{4 - 0}.$$

Hitung:

$$s(0) = 2,$$

dan

$$s(4) = 64 - 96 + 60 + 2 = 30.$$

Maka

$$\frac{s(4) - s(0)}{4} = \frac{30 - 2}{4} = 7.$$

Karena

$$s'(t) = 3t^2 - 12t + 15,$$

maka waktu yang dicari memenuhi

$$s'(c) = 7.$$

Jadi

$$3c^2 - 12c + 15 = 7$$

$$3c^2 - 12c + 8 = 0.$$

Dengan rumus kuadrat,

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{6} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Jadi waktu yang memenuhi adalah

$$\boxed{c = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}} \quad \text{dan} \quad \boxed{c = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Kedua nilai berada pada interval $(0, 4)$, sehingga keduanya valid.

Waktu tersebut tidak tunggal karena persamaan $s'(c) = 7$ menghasilkan dua solusi berbeda dalam interval $(0, 4)$. Hal ini tidak bertentangan dengan Teorema Nilai Rata-rata, karena teorema hanya menjamin keberadaan minimal satu titik, bukan ketunggalan titik.

Topik 2: Turunan Fungsi Transenden

(20 Poin)

Soal 2.1. Tentukan nilai dari konstanta riil a dan b sedemikian sehingga fungsi pias berikut terdiferensialkan di seluruh $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} + b, & \text{untuk } x \leq 0 \\ \ln(1+x) + \cos x, & \text{untuk } x > 0 \end{cases}$$

Solusi Soal 2.1

Agar fungsi $f(x)$ terdiferensialkan di seluruh $\mathbb{R}$, syarat pertama yang harus terpenuhi adalah fungsi tersebut harus kontinu di setiap titik, khususnya pada batas perpindahan fungsi yaitu $x = 0$. Syarat kedua adalah turunan kiri dan turunan kanan di $x = 0$ harus bernilai sama.

Langkah 1: Kekontinuan di $x = 0$ Fungsi f kontinu di $x = 0$ jika dan hanya jika:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Evaluasi limit kiri di $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{ax} + b) = e^0 + b = 1 + b$$

Evaluasi limit kanan di $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x) + \cos x) = \ln(1+0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

Dengan menyamakan limit kiri dan limit kanan:

$$1 + b = 1 \implies b = 0$$

Langkah 2: Keterdiferensialan di $x = 0$ Turunan kiri di $x = 0$ ($f'_-(0)$) didefinisikan sebagai turunan dari cabang $x \leq 0$:

$$f'_-(0) = \left. \frac{d}{dx} (e^{ax} + b) \right|_{x=0} = ae^{ax}|_{x=0} = ae^0 = a$$

Turunan kanan di $x = 0$ ($f'_+(0)$) didefinisikan sebagai turunan dari cabang $x > 0$:

$$f'_+(0) = \left. \frac{d}{dx} (\ln(1+x) + \cos x) \right|_{x=0} = \left(\frac{1}{1+x} - \sin x \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{1+0} - \sin(0) = 1$$

Agar $f(x)$ terdiferensialkan di $x = 0$, turunan kiri dan kanan harus sama:

$$f'_-(0) = f'_+(0) \implies a = 1$$

Jadi, nilai konstanta yang memenuhi adalah $a = 1$ dan $b = 0$.

Soal 2.2. Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi transenden berikut untuk $x \in (0, \pi)$:

$$y = (\sin x)^{\ln x}$$

Solusi Soal 2.2

Kita dapat menyelesaikan masalah ini menggunakan dua cara (pendekatan) berikut.

Cara 1: Diferensiasi Logaritmik Secara Langsung

Gunakan metode *logarithmic differentiation* (diferensiasi logaritmik) secara langsung karena fungsi tersebut memiliki variabel baik pada basis maupun pangkatnya.

Ambil logaritma natural ($\ln$) pada kedua ruas persamaan:

$$\ln y = \ln \left((\sin x)^{\ln x} \right)$$

Gunakan sifat logaritma $\ln(A^B) = B \ln A$:

$$\ln y = \ln x \cdot \ln(\sin x)$$

Turunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan aturan rantai pada ruas kiri dan aturan perkalian pada ruas kanan:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x \cdot \ln(\sin x))$$

Pada ruas kiri:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

Pada ruas kanan (menggunakan aturan perkalian $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ dengan $u = \ln x$ dan $v = \ln(\sin x)$):

$$\begin{aligned} u' &= \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \\ v' &= \frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x \end{aligned}$$

Sehingga turunan ruas kanan adalah:

$$\frac{1}{x} \ln(\sin x) + \ln x \cdot \cot x$$

Gabungkan kedua ruas:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cot x$$

Kalikan kedua ruas dengan y :

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cot x \right)$$

Substitusikan kembali nilai $y = (\sin x)^{\ln x}$:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cot x \right)$$

Cara 2: Penurunan Rumus Umum Turunan Fungsi berbentuk $f(x)^{g(x)}$

Kita juga dapat terlebih dahulu menurunkan rumus umum turunan fungsi berbentuk $y = f(x)^{g(x)}$ secara step-by-step menggunakan diferensiasi logaritmik, kemudian menerapkannya secara langsung.

Langkah 2.1: Penurunan rumus umum turunan $y = f(x)^{g(x)}$

Misalkan $y = f(x)^{g(x)}$ dengan $f(x) > 0$. Ambil logaritma natural ($\ln$) pada kedua ruas persamaan:

$$\ln y = \ln \left(f(x)^{g(x)} \right)$$

Gunakan sifat logaritma $\ln(A^B) = B \ln A$:

$$\ln y = g(x) \ln(f(x))$$

Turunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan aturan rantai pada ruas kiri dan aturan perkalian serta aturan rantai pada ruas kanan:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx} (g(x) \ln(f(x)))$$

Pada ruas kiri:

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

Pada ruas kanan (menggunakan aturan perkalian $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ dengan $u = g(x)$ dan $v = \ln(f(x))$):

$$\frac{d}{dx} (g(x) \ln(f(x))) = g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Dengan menggabungkan kedua ruas, kita peroleh:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}$$

Kalikan kedua ruas dengan y :

$$\frac{dy}{dx} = y \left(g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right)$$

Substitusikan kembali nilai $y = f(x)^{g(x)}$ untuk mendapatkan rumus umum:

$$\frac{d}{dx} \left(f(x)^{g(x)} \right) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \quad \dots \text{ (Rumus Umum)}$$

Langkah 2.2: Penerapan rumus umum pada fungsi $y = (\sin x)^{\ln x}$

Untuk fungsi $y = (\sin x)^{\ln x}$, kita miliki:

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = \ln x \implies g'(x) = \frac{1}{x}$$

Substitusikan fungsi-fungsi tersebut ke dalam Rumus Umum:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{1}{x} \ln(\sin x) + \frac{\ln x \cdot \cos x}{\sin x} \right)$$

Sederhanakan dengan menggunakan hubungan trigonometri $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cot x \right)$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi tersebut adalah:

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\ln x} \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cot x \right)$$

Soal 2.3. Sebuah benda bermassa m yang tergantung pada pegas di dalam suatu medium kental berosilasi. Jarak benda dari posisi kesetimbangannya (dalam meter) pada setiap waktu $t \geq 0$ (dalam detik) dinyatakan oleh fungsi posisi:

$$x(t) = e^{-kt} \cos(\omega t)$$

dengan $k > 0$ menyatakan konstanta redaman medium dan $\omega > 0$ menyatakan frekuensi sudut angular dari osilasi tersebut. Tentukan fungsi kecepatan sesaat benda tersebut, yaitu $v(t) = x'(t)$, untuk $t \geq 0$.

Solusi Soal 2.3

Fungsi kecepatan sesaat $v(t)$ didapatkan dengan menurunkan fungsi posisi $x(t)$ terhadap t . Dengan menggunakan aturan perkalian $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ dan aturan rantai:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} (e^{-kt}) \cos(\omega t) + e^{-kt} \frac{d}{dt} (\cos(\omega t)) \\ &= -ke^{-kt} \cos(\omega t) + e^{-kt} (-\omega \sin(\omega t)) \\ &= -e^{-kt} (k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)). \end{aligned}$$

Jadi, fungsi kecepatan benda adalah $v(t) = -e^{-kt} (k \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))$.

Soal 2.4. Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi transenden berikut dan sederhanakan hasilnya:

$$y = \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

Solusi Soal 2.4

Gunakan aturan rantai untuk menentukan turunan pertama dari fungsi tersebut. Misalkan $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, sehingga $y = \arctan(u)$.

Turunan dari y terhadap u adalah:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{1 + u^2}$$

Turunan dari u terhadap x adalah:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Berdasarkan aturan rantai, turunan pertama y terhadap x adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Sederhanakan suku penyebut pada pecahan pertama:

$$1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Substitusikan kembali penyederhanaan ini ke dalam persamaan turunan:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{2}{e^x + e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari fungsi tersebut adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

Soal 2.5. Diberikan fungsi transenden $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ untuk seluruh $x \in \mathbb{R}$.

- Tentukan turunan pertama $f'(x)$ dan nyatakan dalam bentuk yang paling sederhana.
- Definisikan fungsi $g(x) = f(x) + f(-x)$. Tunjukkan dengan menggunakan konsep turunan bahwa $g'(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, lalu simpulkan karakteristik dari fungsi $g(x)$.
- Verifikasi secara aljabar hasil yang diperoleh pada bagian (b) dengan cara menyederhanakan bentuk $f(x) + f(-x)$ secara langsung tanpa menggunakan turunan.

Solusi Soal 2.5

- Gunakan aturan rantai untuk mencari turunan pertama dari $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx} (x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

Jadi, turunan pertama dari $f(x)$ adalah $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- Diketahui $g(x) = f(x) + f(-x)$. Kita turunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan aturan rantai pada suku kedua:

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x) = f'(x) - f'(-x)$$

Substitusikan formula $f'(x)$ yang diperoleh pada bagian (a):

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Sehingga:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

Karena $g'(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka fungsi $g(x)$ merupakan fungsi konstan.

c) Untuk melakukan verifikasi aljabar secara langsung:

$$g(x) = f(x) + f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})$$

Sederhanakan bentuk argumen logaritma kedua:

$$g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

Gunakan sifat logaritma $\ln(A) + \ln(B) = \ln(A \cdot B)$:

$$g(x) = \ln\left[(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)\right]$$

Gunakan rumus selisih dua kuadrat $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$:

$$g(x) = \ln\left[(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2\right] = \ln(x^2 + 1 - x^2) = \ln(1) = 0$$

Hasil penyederhanaan aljabar langsung menunjukkan $g(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Ini sesuai dengan hasil di bagian (b) bahwa $g(x)$ adalah fungsi konstan (khususnya, konstan bernilai nol).

Topik 3: Turunan Tingkat Tinggi

(15 Poin)

Soal 3.1. Tentukan turunan ketiga $\frac{d^3y}{dx^3}$ dari fungsi berikut.

$$y = \sin(x^3)$$

Solusi Soal 3.1

Turunan pertama diperoleh dengan aturan rantai:

$$y' = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3).$$

Turunan kedua diperoleh dengan aturan perkalian:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} (3x^2 \cos(x^3)) \\ &= 6x \cos(x^3) + 3x^2 (-\sin(x^3) \cdot 3x^2) \end{aligned}$$

$$= 6x \cos(x^3) - 9x^4 \sin(x^3).$$

Turunan ketiganya adalah:

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx} (6x \cos(x^3) - 9x^4 \sin(x^3)) \\ &= (6 \cos(x^3) - 18x^3 \sin(x^3)) + (-36x^3 \sin(x^3) - 27x^6 \cos(x^3)) \\ &= (6 - 27x^6) \cos(x^3) - 54x^3 \sin(x^3). \end{aligned}$$

Jadi,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (6 - 27x^6) \cos(x^3) - 54x^3 \sin(x^3).$$

Soal 3.2. Tentukan turunan ketiga $\frac{d^3 y}{dx^3}$ dari fungsi berikut.

$$y = \frac{3x}{1-x}$$

Solusi Soal 3.2

Ubah bentuk fungsi terlebih dahulu:

$$y = \frac{3x}{1-x} = \frac{-3(1-x) + 3}{1-x} = -3 + \frac{3}{1-x} = -3 + 3(1-x)^{-1}.$$

Turunan pertama:

$$y' = 3(1-x)^{-2}.$$

Turunan kedua:

$$y'' = 6(1-x)^{-3}.$$

Turunan ketiga:

$$y''' = 18(1-x)^{-4}.$$

Jadi,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{18}{(1-x)^4}.$$

Soal 3.3. Misalkan $f(x) = x^n$ untuk suatu bilangan bulat positif n . Tunjukkan bahwa:

$$f^{(n)}(x) = n!$$

Solusi Soal 3.3

Perhatikan pola turunan berturut-turut dari x^n :

$$f'(x) = nx^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}.$$

Secara umum, setelah diturunkan sebanyak k kali dengan $1 \leq k \leq n$, diperoleh:

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Dengan mengambil $k = n$, kita peroleh:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(n-n)!}x^{n-n} = \frac{n!}{0!}x^0 = n!.$$

Jadi, terbukti bahwa $f^{(n)}(x) = n!$.

Topik 4: Turunan Implisit

(15 Poin)

Soal 4.1. Tinjau kurva yang didefinisikan oleh persamaan implisit berikut:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 20 = 0$$

- Tentukan $\frac{dy}{dx}$
- Tentukan semua titik pada kurva di mana garis singgungnya merupakan garis horizontal.
- Tentukan semua titik pada kurva di mana garis singgungnya merupakan garis vertikal.
- Tentukan persamaan garis singgung di titik $(4, 1)$

Solusi Soal 4.1

- a) **Tentukan $\frac{dy}{dx}$:** Lakukan turunan implisit terhadap x pada kedua ruas persamaan:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 20) = \frac{d}{dx} (0)$$

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} - 2 + 8 \frac{dy}{dx} - 0 = 0$$

Kelompokkan suku-suku yang mengandung $\frac{dy}{dx}$ di satu ruas:

$$8y \frac{dy}{dx} + 8 \frac{dy}{dx} = -2x + 2$$

Keluarkan faktor $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} (8y + 8) = -2x + 2$$

Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ dan sederhanakan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 2}{8y + 8}$$

*misal hanya sampai sini dan tidak lanjut disederhanakan, itu sudah cukup

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(-x + 1)}{8(y + 1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 1}{4(y + 1)}$$

- b) **Garis Singgung Horizontal:** Garis singgung horizontal terjadi ketika gradiennya bernilai nol, yaitu $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$\frac{-x+1}{4(y+1)} = 0 \implies -x+1=0 \implies -x=-1 \implies x=1 \quad (\text{syarat: } 4(y+1) \neq 0)$$

Substitusikan $x = 1$ ke persamaan kurva asal:

$$(1)^2 + 4y^2 - 2(1) + 8y - 20 = 0$$

$$1 + 4y^2 - 2 + 8y - 20 = 0$$

$$4y^2 + 8y - 21 = 0$$

Faktorkan, lalu cari nilai y :

$$(4y - 6)(4y + 14) = 0$$

bagi kedua ruas dengan 2, lalu kita dapat:

$$(2y - 3)(2y + 7) = 0$$

Kita dapati $y = \frac{3}{2}$ dan $y = -\frac{7}{2}$. Jadi, titik-titik di mana garis singgungnya horizontal adalah $(1, \frac{3}{2})$ dan $(1, -\frac{7}{2})$.

- c) **Garis Singgung Vertikal:** Garis singgung vertikal terjadi ketika gradien tidak terdefinisi (menuju tak hingga), yang bersesuaian dengan pembuat nol penyebut dari $\frac{dy}{dx}$ dengan syarat pembilang tidak nol.

$$4(y+1) = 0 \implies y+1=0 \implies y=-1 \quad (\text{syarat: } -x+1 \neq 0)$$

Substitusikan $y = -1$ ke persamaan kurva asal:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 20 = 0$$

$$x^2 + 4(-1)^2 - 2x + 8(-1) - 20 = 0$$

$$x^2 + 4 - 2x - 8 - 20 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

Faktorkan, lalu cari nilai x :

$$(x - 6)(x + 4) = 0$$

Kita dapati $x = 6$ dan $x = -4$. Jadi, titik-titik di mana garis singgungnya vertikal adalah $(6, -1)$ dan $(-4, -1)$.

- d) **Persamaan Garis Singgung di Titik (4, 1):** Cari gradien (m) di titik (4, 1) dengan substitusi nilai x dan y di titik tersebut ke turunan pertama

$$m = \frac{-x+1}{4(y+1)} = \frac{-4+1}{4(1+1)} = \frac{-3}{4(2)} = \frac{-3}{8}$$

Dengan rumus persamaan garis lurus $y - y_1 = m(x - x_1)$, kita dapati:

$$y - 1 = \frac{-3}{8}(x - 4)$$

$$8y - 8 = -3(x - 4)$$

$$8y - 8 = -3x + 12$$

$$3x + 8y - 20 = 0$$

Persamaan garis singgung persamaan tersebut di titik $(4, 1)$ adalah:

$$3x + 8y - 20 = 0$$

atau bentuk lain yang setara seperti:

$$y = \frac{-3x + 20}{8}$$

Soal 4.2. Tentukan persamaan garis normal dari kurva implisit berikut pada titik $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$x \sin y + y \cos x = \frac{\pi}{2}$$

(Catatan: Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung di titik singgungnya.)

Solusi Soal 4.2

Lakukan diferensiasi implisit terhadap x pada kedua ruas persamaan:

$$\frac{d}{dx}(x \sin y + y \cos x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

Gunakan aturan perkalian untuk masing-masing suku:

$$\left(1 \cdot \sin y + x \cos y \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \cos x - y \sin x \right) = 0$$

Kelompokkan suku-suku $\frac{dy}{dx}$:

$$(x \cos y + \cos x) \frac{dy}{dx} = y \sin x - \sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}$$

Substitusikan titik singgung $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$ untuk mencari gradien garis singgung (m_t):

$$m_t = \frac{dy}{dx} \Big|_{(0, \frac{\pi}{2})} = \frac{\frac{\pi}{2} \sin(0) - \sin(\frac{\pi}{2})}{0 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

Karena garis normal tegak lurus dengan garis singgung, maka hubungan gradiennya adalah:

$$m_n \cdot m_t = -1 \implies m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Gunakan persamaan garis $y - y_1 = m_n(x - x_1)$ dengan titik $(0, \frac{\pi}{2})$ dan gradien $m_n = 1$:

$$y - \frac{\pi}{2} = 1(x - 0) \implies y = x + \frac{\pi}{2}$$

Jadi, persamaan garis normal dari kurva tersebut di titik $(0, \frac{\pi}{2})$ adalah $y = x + \frac{\pi}{2}$ atau $x - y + \frac{\pi}{2} = 0$.

Topik 5: Turunan Parametrik

(15 Poin)

Soal 5.1. Tinjau kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik berikut:

$$x(t) = \cos(2t), \quad y(t) = \sin(3t)$$

- a) Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$
- b) Hitung nilai $\frac{d^2y}{dx^2}$ dengan parameter $t = \frac{\pi}{6}$

Solusi Soal 5.1

- a) **Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$:**

Tentukan turunan pertama terhadap t :

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin(2t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3 \cos(3t)$$

Tentukan $\left(\frac{dy}{dx}\right)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \cos(3t)}{-2 \sin(2t)}$$

Turunkan $\frac{dy}{dx}$ terhadap t :

Pemisalan u dan v :

- $\frac{3 \cos(3t)}{-2 \sin(2t)} = \frac{u}{v}$
- $u = 3 \cos(3t) \implies \frac{du}{dt} = 3 \cdot -3 \sin(3t) = -9 \sin(3t)$
- $v = -2 \sin(2t) \implies \frac{dv}{dt} = -2 \cdot 2 \cos(2t) = -4 \cos(2t)$

Selesaikan turunan $\frac{dy}{dx}$ terhadap t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= \frac{(-9 \sin(3t))(-2 \sin(2t)) - (3 \cos(3t))(-4 \cos(2t))}{(-2 \sin(2t))^2} \\ &= \frac{18 \sin(3t) \sin(2t) + 12 \cos(3t) \cos(2t)}{4 \sin^2(2t)} \end{aligned}$$

Tentukan turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{18 \sin(3t) \sin(2t) + 12 \cos(3t) \cos(2t)}{4 \sin^2(2t)} \cdot \frac{1}{-2 \sin(2t)} \\ &= \frac{18 \sin(3t) \sin(2t) + 12 \cos(3t) \cos(2t)}{-8 \sin^3(2t)} \end{aligned}$$

b) Hitung nilai $\frac{d^2y}{dx^2}$ dengan parameter $t = \frac{\pi}{6}$ Sudut yang dibentuk dari $t = \frac{\pi}{6}$:

- $2t = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$
- $3t = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} (90^\circ)$

Nilai-nilai trigonometri:

- $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Substitusi nilai-nilai trigonometri tersebut:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{6}} &= \frac{18(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 12(0)\left(\frac{1}{2}\right)}{-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \\ &= \frac{9\sqrt{3} + 0}{-8\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{-3\sqrt{3}} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Soal 5.2. Tinjau kurva parametrik berikut:

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = t^3 - 3t$$

Tentukan interval nilai parameter t sedemikian sehingga grafik kurva tersebut cekung ke atas ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$).

Solusi Soal 5.2

Langkah 1: Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ Turunkan masing-masing fungsi terhadap t :

$$\frac{dx}{dt} = e^t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$$

Gunakan aturan turunan parametrik pertama:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{e^t} = 3(t^2 - 1)e^{-t}$$

Langkah 2: Tentukan turunan kedua $\frac{d^2y}{dx^2}$ Gunakan formula turunan kedua untuk fungsi parametrik:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Hitung turunan pembilang terhadap t menggunakan aturan perkalian terhadap $3(t^2 -$

1) e^{-t} :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [3(t^2 - 1)e^{-t}] &= 3(2t)e^{-t} + 3(t^2 - 1)(-e^{-t}) \\ &= 6te^{-t} - 3(t^2 - 1)e^{-t} \\ &= (-3t^2 + 6t + 3)e^{-t}\end{aligned}$$

Substitusikan ke formula turunan kedua:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-3t^2 + 6t + 3)e^{-t}}{e^t} = (-3t^2 + 6t + 3)e^{-2t}$$

Faktorkan konstanta -3 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3(t^2 - 2t - 1)e^{-2t}$$

Langkah 3: Tentukan interval kecekungan ke atas Grafik cekung ke atas jika $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$:

$$-3(t^2 - 2t - 1)e^{-2t} > 0$$

Karena fungsi eksponensial $e^{-2t} > 0$ untuk seluruh $t \in \mathbb{R}$, kita dapat membagi kedua ruas dengan $-3e^{-2t}$ (dan membalik tanda pertidaksamaan):

$$t^2 - 2t - 1 < 0$$

Cari pembuat nol dari persamaan kuadrat $t^2 - 2t - 1 = 0$ menggunakan rumus ABC:

$$t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Maka diperoleh dua akar, yaitu $t_1 = 1 - \sqrt{2}$ dan $t_2 = 1 + \sqrt{2}$. Pertidaksamaan $t^2 - 2t - 1 < 0$ dipenuhi pada interval di antara kedua akar tersebut:

$$1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$$

Jadi, kurva tersebut cekung ke atas pada interval parameter $t \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Topik 6: Aplikasi Turunan

(20 Poin)

Soal 6.1. Sebuah toko purcel menjual 140 laptop per bulan dengan harga Rp5.000.000 per unit. Berdasarkan survei pasar, setiap penurunan harga sebesar Rp100.000, jumlah laptop yang terjual akan bertambah 10 unit per bulan. Kapasitas gudang toko hanya mampu menampung 300 unit per bulan.

- Tentukan fungsi pendapatan dari situasi diatas.
- Tentukan harga jual yang memaksimumkan pendapatan. Kemudian, hitung nilai pendapatan maksimum yang diperoleh setiap bulan.

Solusi Soal 6.1**a) Menentukan Fungsi Pendapatan**

Misalkan,

x = banyaknya penurunan harga sebesar Rp100.000

Maka,

Fungsi harga per unit (setiap penurunan sebesar Rp100.000):

$$P(x) = 5.000.000 - 100.000x$$

Fungsi jumlah unit terjual (setiap penurunan menambah penjualan sebanyak 10 unit):

$$Q(x) = 140 + 10x$$

Fungsi Pendapatan (Pendapatan = Harga x Jumlah):

$$R(x) = P(x) \cdot Q(x) = (5.000.000 - 100.000x)(140 + 10x)$$

$$R(x) = 700.000.000 + 36.000.000x - 1.000.000x^2$$

Batasan domain (kapasitas gudang maksimal 300 unit):

$$140 + 10x \leq 300 \implies x \leq 16$$

Domain yang berlaku: $0 \leq x \leq 16$

b) Menentukan Harga yang Memberikan Pendapatan Maksimum

Cari titik kritis:

$$R'(x) = 36.000.000 - 2.000.000x = 0$$

diperoleh

$$x = 18$$

Cek apakah titik berada di dalam domain:

Karena domain dibatasi oleh $x \leq 16$, $x = 18$ tidak memenuhi syarat (di luar kapasitas gudang, sebab akan menghasilkan $140 + 180 = 320$ unit > 300 unit).

Oleh karena itu, pendapatan maksimum yang memenuhi syarat terjadi saat

$$x = 16$$

Sehingga,

harga yang harus ditetapkan:

$$P(16) = 5.000.000 - 100.000(16) = \text{Rp}3.400.000$$

Pendapatan maksimum:

$$R(16) = 700.000.000 + 36.000.000(16) - 1.000.000(16)^2 = \text{Rp}1.020.000.000$$

Soal 6.2. Tinggi permukaan air sungai (dalam meter) selama satu hari dimodelkan oleh fungsi:

$$H(t) = -0,1t^3 + 1,5t^2 - 4,8t + 18, \quad 0 \leq t \leq 10$$

di mana t adalah waktu dalam jam sejak pukul 06.00 pagi.

- a) Tentukan pada pukul berapa tinggi permukaan air mencapai nilai tertinggi dalam rentang waktu tersebut.
- b) Tentukan pada pukul berapa laju kenaikan permukaan air paling cepat. Apakah air masih terus naik setelah waktu tersebut? Jelaskan.

Solusi Soal 6.2

a) Menentukan waktu ketika tinggi permukaan air mencapai nilai maksimum
 Untuk mencari tinggi maksimum, terlebih dahulu dicari titik kritis dengan menentukan turunan pertama.

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{d}{dt} (-0,1t^3 + 1,5t^2 - 4,8t + 18) \\ &= -0,3t^2 + 3t - 4,8. \end{aligned}$$

Titik kritis diperoleh dengan

$$H'(t) = 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} H'(t) &= 0 \\ -0,3t^2 + 3t - 4,8 &= 0 \\ 3t^2 - 30t + 48 &= 0 \\ t^2 - 10t + 16 &= 0 \\ (t - 2)(t - 8) &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh

$$t = 2 \quad \text{atau} \quad t = 8$$

Selanjutnya, hitung nilai fungsi pada titik ujung interval dan titik kritis.

$$\begin{aligned} H(0) &= 18 \\ H(2) &= -0,1(2)^3 + 1,5(2)^2 - 4,8(2) + 18 = 13,6 \\ H(8) &= -0,1(8)^3 + 1,5(8)^2 - 4,8(8) + 18 = 24,4 \\ H(10) &= -0,1(10)^3 + 1,5(10)^2 - 4,8(10) + 18 = 20 \end{aligned}$$

Karena nilai terbesar adalah

$$H(8) = 24,4$$

tinggi permukaan air maksimum terjadi saat

$$t = 8$$

t dihitung sejak pukul 06.00 pagi, maka

$$06.00 + 8 \text{ jam} = 14.00$$

Jadi, tinggi permukaan air maksimum terjadi pada pukul 14.00 dengan tinggi maksimum sebesar 24,4 meter

b) Menentukan kapan laju kenaikan permukaan air paling cepat.

Laju kenaikan permukaan air diberikan oleh turunan pertama, yaitu

$$H'(t) = -0,3t^2 + 3t - 4,8$$

Turunan kedua adalah

$$\begin{aligned} H''(t) &= \frac{d}{dt} (-0,3t^2 + 3t - 4,8) \\ &= -0,6t + 3. \end{aligned}$$

Laju kenaikan maksimum terjadi saat

$$H''(t) = 0$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} H''(t) &= 0 \\ -0,6t + 3 &= 0 \\ -0,6t &= -3 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

t dihitung sejak pukul 06.00 pagi, maka

$$06.00 + 5 \text{ jam} = 11.00$$

Laju kenaikan maksimum adalah

$$\begin{aligned} H'(5) &= -0,3(5)^2 + 3(5) - 4,8 \\ &= -7,5 + 15 - 4,8 \\ &= 2,7 \text{ meter/jam.} \end{aligned}$$

Karena $H'(5) > 0$, permukaan air masih mengalami kenaikan. Tinggi permukaan air baru mencapai maksimum ketika $H'(8) = 0$, yaitu pada pukul 14.00. Setelah itu, $H'(t) < 0$ sehingga permukaan air mulai menurun.