

PR 3
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA

Topik: Turunan dan Aplikasi

Dikumpul: Kamis, 2 Juli 2026, Jam 20:00 WIB

Petunjuk Umum Pengerjaan PR:

1. **Penggunaan Perangkat Kecerdasan Buatan (AI):** Penggunaan peralatan berbasis Kecerdasan Buatan (Artificial Intelligence/AI) **diperbolehkan hanya sebagai sarana bantu belajar**. Kendati demikian, setiap mahasiswa **bertanggung jawab penuh secara akademis** untuk memahami isi, alur logika, dan kebenaran matematis dari jawaban yang dituliskan.
2. **Langkah Pengerjaan:** Tuliskan seluruh langkah penyelesaian soal secara **jelas, runtut, dan lengkap**. Jawaban akhir tanpa disertai argumen atau langkah matematis yang memadai **tidak akan mendapatkan nilai penuh**. **Mahasiswa wajib memberikan kotak atau highlight (stabilo) pada jawaban akhir dari setiap nomor.**
3. **Pengumpulan Berkas:** Jawaban **wajib berupa tulisan tangan secara rapi** (baik ditulis fisik di atas kertas A4 lalu dipindai/scan, maupun ditulis secara digital menggunakan tablet/stylus). Hasil pekerjaan harus disimpan sebagai **satu berkas PDF tunggal yang jelas dan terbaca**, kemudian diunggah melalui platform **SCELE** sebelum tenggat waktu yang ditentukan. Format penamaan berkas yang dikumpulkan adalah **KODEASDOS_NamaLengkap_NPM_PR3.pdf** (contoh: **RSA_GeoffreyHinton_2501233211_PR3.pdf**).
4. **Konsekuensi Keterlambatan:** Batas waktu pengumpulan berkas di SCELE bersifat **mutlak**. Keterlambatan pengumpulan akan dikenai penalti pengurangan nilai sebesar **10% per jam keterlambatan** dari nilai total yang diperoleh.
5. **Integritas Akademik:** Junjung tinggi nilai kejujuran. Segala bentuk kecurangan akademik, plagiarisme, maupun kerja sama tidak sah antar-mahasiswa akan berakibat pada pemberian **nilai nol (0) secara langsung** untuk tugas ini.

Topik 1: Teorema Nilai Rata-rata

(15 Poin)

Soal 1.1. Diberikan fungsi

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + x, \quad x \in [-2, 2].$$

Tunjukkan bahwa syarat Teorema Nilai Rata-rata terpenuhi pada interval $[-2, 2]$, lalu tentukan semua nilai $c \in (-2, 2)$ yang memenuhi

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}.$$

Setelah itu, jelaskan secara singkat makna geometris dari semua nilai c yang diperoleh.

Soal 1.2. Untuk $0 \leq x \leq e$, didefinisikan fungsi pias

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x + b, & 1 < x \leq e. \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b agar Teorema Nilai Rata-rata berlaku pada interval $[0, e]$. Setelah itu, tentukan semua nilai $c \in (0, e)$ yang dijamin oleh Teorema Nilai Rata-rata.

Soal 1.3. Sebuah kendaraan bergerak pada lintasan lurus dengan fungsi posisi

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 2, \quad 0 \leq t \leq 4,$$

dengan $s(t)$ dalam meter dan t dalam detik.

- Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk menjamin adanya waktu ketika kecepatan sesaat sama dengan kecepatan rata-rata pada interval $[0, 4]$.
- Tentukan semua waktu tersebut.
- Jelaskan mengapa dalam kasus ini waktu tersebut tidak hanya satu.

Topik 2: Turunan Fungsi Transenden

(20 Poin)

Soal 2.1. Tentukan nilai dari konstanta riil a dan b sedemikian sehingga fungsi pias berikut terdiferensialkan di seluruh $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} + b, & \text{untuk } x \leq 0 \\ \ln(1+x) + \cos x, & \text{untuk } x > 0 \end{cases}$$

Soal 2.2. Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi transenden berikut untuk $x \in (0, \pi)$:

$$y = (\sin x)^{\ln x}$$

Soal 2.3. Sebuah benda bermassa m yang tergantung pada pegas di dalam suatu medium kental berosilasi. Jarak benda dari posisi kesetimbangannya (dalam meter) pada setiap waktu $t \geq 0$ (dalam detik) dinyatakan oleh fungsi posisi:

$$x(t) = e^{-kt} \cos(\omega t)$$

dengan $k > 0$ menyatakan konstanta redaman medium dan $\omega > 0$ menyatakan frekuensi sudut angular dari osilasi tersebut. Tentukan fungsi kecepatan sesaat benda tersebut, yaitu $v(t) = x'(t)$, untuk $t \geq 0$.

Soal 2.4. Tentukan turunan pertama $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi transenden berikut dan sederhanakan hasilnya:

$$y = \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

Soal 2.5. Diberikan fungsi transenden $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ untuk seluruh $x \in \mathbb{R}$.

- Tentukan turunan pertama $f'(x)$ dan nyatakan dalam bentuk yang paling sederhana.
- Definisikan fungsi $g(x) = f(x) + f(-x)$. Tunjukkan dengan menggunakan konsep turunan bahwa $g'(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, lalu simpulkan karakteristik dari fungsi $g(x)$.
- Verifikasi secara aljabar hasil yang diperoleh pada bagian (b) dengan cara menyederhanakan bentuk $f(x) + f(-x)$ secara langsung tanpa menggunakan turunan.

Topik 3: Turunan Tingkat Tinggi

(15 Poin)

Soal 3.1. Tentukan turunan ketiga $\frac{d^3y}{dx^3}$ dari fungsi berikut.

$$y = \sin(x^3)$$

Soal 3.2. Tentukan turunan ketiga $\frac{d^3y}{dx^3}$ dari fungsi berikut.

$$y = \frac{3x}{1-x}$$

Soal 3.3. Misalkan $f(x) = x^n$ untuk suatu bilangan bulat positif n . Tunjukkan bahwa:

$$f^{(n)}(x) = n!$$

Topik 4: Turunan Implisit

(15 Poin)

Soal 4.1. Tinjau kurva yang didefinisikan oleh persamaan implisit berikut:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 20 = 0$$

- Tentukan $\frac{dy}{dx}$
- Tentukan semua titik pada kurva di mana garis singgungnya merupakan garis horizontal.
- Tentukan semua titik pada kurva di mana garis singgungnya merupakan garis vertikal.
- Tentukan persamaan garis singgung di titik $(4, 1)$

Soal 4.2. Tentukan persamaan garis normal dari kurva implisit berikut pada titik $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$x \sin y + y \cos x = \frac{\pi}{2}$$

(Catatan: Garis normal adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung di titik singgungnya.)

Topik 5: Turunan Parametrik**(15 Poin)****Soal 5.1.** Tinjau kurva yang didefinisikan oleh persamaan parametrik berikut:

$$x(t) = \cos(2t), \quad y(t) = \sin(3t)$$

- Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$
- Hitung nilai $\frac{d^2y}{dx^2}$ dengan parameter $t = \frac{\pi}{6}$

Soal 5.2. Tinjau kurva parametrik berikut:

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = t^3 - 3t$$

Tentukan interval nilai parameter t sedemikian sehingga grafik kurva tersebut cekung ke atas ($\frac{d^2y}{dx^2} > 0$).

Topik 6: Aplikasi Turunan**(20 Poin)**

Soal 6.1. Sebuah toko purcel menjual 140 laptop per bulan dengan harga Rp5.000.000 per unit. Berdasarkan survei pasar, setiap penurunan harga sebesar Rp100.000, jumlah laptop yang terjual akan bertambah 10 unit per bulan. Kapasitas gudang toko hanya mampu menampung 300 unit per bulan.

- Tentukan fungsi pendapatan dari situasi diatas.
- Tentukan harga jual yang memaksimumkan pendapatan. Kemudian, hitung nilai pendapatan maksimum yang diperoleh setiap bulan.

Soal 6.2. Tinggi permukaan air sungai (dalam meter) selama satu hari dimodelkan oleh fungsi:

$$H(t) = -0,1t^3 + 1,5t^2 - 4,8t + 18, \quad 0 \leq t \leq 10$$

di mana t adalah waktu dalam jam sejak pukul 06.00 pagi.

- Tentukan pada pukul berapa tinggi permukaan air mencapai nilai tertinggi dalam rentang waktu tersebut.
- Tentukan pada pukul berapa laju kenaikan permukaan air paling cepat. Apakah air masih terus naik setelah waktu tersebut? Jelaskan.

Pertanyaan Refleksi

Setelah menyelesaikan seluruh Pekerjaan Rumah ini, luangkan waktu sejenak untuk merefleksikan dan menjawab pertanyaan-pertanyaan berikut:

- Bagian materi atau konsep mana dalam PR ini yang Anda rasakan paling menantang/sulit? Mengapa konsep tersebut terasa sulit bagi Anda?
- Strategi belajar atau sumber daya bantuan apa yang Anda gunakan dan terbukti

paling efektif membantu Anda untuk memahami konsep yang menantang tersebut?

- c) Berikan penilaian mandiri terhadap tingkat pemahaman Anda untuk topik minggu ini pada skala 1–10 (1 = tidak paham sama sekali, 10 = paham sepenuhnya). Berikan alasan singkat di balik penilaian tersebut.

**Bagian refleksi ini wajib diisi sebagai komitmen proses belajar mandiri Anda dan akan digunakan oleh Asisten Dosen untuk memetakan kebutuhan pemahaman kelas asistensi berikutnya.*