

PR 2
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA
Topik: **Limit dan Turunan**

Topik 1: Limit dan Kontinuitas

(49 Poin)

Soal 1.1. (10 Poin) Gunakan definisi formal limit ($\epsilon - \delta$) untuk membuktikan bahwa:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1) = 4$$

(*Petunjuk:* Anda perlu mencari batas atas untuk $|x - 1|$ saat menentukan nilai δ).

Solusi Soal 1.1

Analisis Pendahuluan (Mencari δ): Diberikan $\epsilon > 0$. Kita ingin mencari $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga jika $0 < |x - 3| < \delta$, maka:

$$|(x^2 - 2x + 1) - 4| < \epsilon$$

Sederhanakan bentuk di atas:

$$|(x^2 - 2x + 1) - 4| = |x^2 - 2x - 3| = |(x - 3)(x + 1)| = |x - 3||x + 1|$$

Kita perlu membatasi faktor $|x + 1|$. Asumsikan $\delta \leq 1$. Jika $0 < |x - 3| < 1$, maka:

$$-1 < x - 3 < 1 \implies 2 < x < 4$$

Dengan menambahkan 1 pada pertidaksamaan tersebut, kita peroleh:

$$3 < x + 1 < 5 \implies |x + 1| < 5$$

Sehingga,

$$|x - 3||x + 1| < 5|x - 3|$$

Agar diperoleh $5|x - 3| \leq \epsilon$, kita dapat memilih $|x - 3| < \frac{\epsilon}{5}$. Oleh karena itu, pilihlah $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{5}\right)$.

Bukti Formal: Diberikan $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{5}\right)$. Jika $0 < |x - 3| < \delta$, maka:

a) Karena $\delta \leq 1$, berlaku $|x - 3| < 1$ yang berimplikasi pada $|x + 1| < 5$.

b) Karena $\delta \leq \frac{\epsilon}{5}$, berlaku $|x - 3| < \frac{\epsilon}{5}$.

Akibatnya, kita mempunyai:

$$|(x^2 - 2x + 1) - 4| = |(x - 3)(x + 1)| = |x - 3||x + 1| < \frac{\epsilon}{5} \cdot 5 = \epsilon$$

Terbukti secara formal menggunakan definisi $\epsilon - \delta$ bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 1) = 4$.

Soal 1.2. (12 Poin) Hitunglah nilai limit berikut. Jika limit tidak ada, jelaskan alasannya melalui analisis limit kiri dan limit kanan!

a) (4 Poin) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x \sin(2x)}$

b) (4 Poin) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

c) (4 Poin) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x)$

Solusi Soal 1.2

a) Menggunakan identitas trigonometri $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$, diperoleh $1 - \cos(4x) = 2\sin^2(2x)$. Substitusikan ke dalam limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x \sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(2x)}{x \sin(2x)}$$

Karena $x \rightarrow 0$ ($x \neq 0$), maka $\sin(2x) \neq 0$, sehingga kita dapat membagi pembilang dan penyebut dengan $\sin(2x)$:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \right) = 4 \cdot 1 = 4$$

b) Evaluasi limit di $x = 1$ melalui limit sepihak:

• **Limit Kanan** ($x \rightarrow 1^+$): Untuk $x > 1$, berlaku $|x - 1| = x - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

• **Limit Kiri** ($x \rightarrow 1^-$): Untuk $x < 1$, berlaku $|x - 1| = -(x - 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -(1 + 1) = -2$$

Karena nilai limit kiri dan limit kanan tidak sama ($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$), maka **limit tersebut tidak ada**.

c) Kalikan dengan bentuk sekawannya:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 + 3x - 1) - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} + 2x} \end{aligned}$$

Karena $x \rightarrow \infty$, maka $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Bagi pembilang dan penyebut dengan x :

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2} = \frac{3 - 0}{\sqrt{4 + 0 - 0} + 2} = \frac{3}{2 + 2} = \frac{3}{4}$$

Soal 1.3. (10 Poin) Diberikan fungsi *piecewise* berikut.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(ax)}{x^2}, & \text{jika } x < 0 \\ b, & \text{jika } x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x}, & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b dengan $a > 0$ sedemikian rupa sehingga fungsi $f(x)$ kontinu di mana-mana.

Solusi Soal 1.3

Fungsi $f(x)$ sudah kontinu untuk $x \neq 0$ karena dibentuk oleh pembagian fungsi-fungsi elementer yang kontinu. Agar $f(x)$ kontinu di mana-mana, syarat perlu dan cukupnya adalah $f(x)$ kontinu di titik sambungan $x = 0$, yaitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

a) **Limit Kiri** ($x \rightarrow 0^-$): Menggunakan identitas $1 - \cos(ax) = 2 \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{ax}{2}} \cdot \frac{a}{2} \right)^2 = 2 \cdot \left(1 \cdot \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

b) **Limit Kanan** ($x \rightarrow 0^+$): Menggunakan limit standar $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x} \right) = 3 \cdot 1 = 3$$

c) **Nilai Fungsi dan Penentuan Konstanta:** Diketahui $f(0) = b$. Dari syarat kekontinuan:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \implies \frac{a^2}{2} = 3 \implies a^2 = 6$$

Karena $a > 0$, diperoleh $a = \sqrt{6}$. Selanjutnya,

$$b = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \implies b = 3$$

Jadi, nilai konstanta agar fungsi $f(x)$ kontinu di mana-mana adalah $a = \sqrt{6}$ dan $b = 3$.

Soal 1.4. (9 Poin) Diberikan fungsi $g(x)$ dengan persamaan berikut.

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$$

a) **(2 Poin)** Tentukan domain dari fungsi $g(x)$.

b) **(4 Poin)** Cari semua persamaan asimtot datar dan asimtot tegak dari fungsi $g(x)$. Buktikan keberadaan asimtot tersebut menggunakan notasi limit.

c) **(3 Poin)** Apakah kurva fungsi memotong asimtot datarnya? Buktikan!

Solusi Soal 1.4

Faktorkan pembilang dan penyebut fungsi $g(x)$:

$$g(x) = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}$$

- a) **Domain Fungsi $g(x)$:** Fungsi rasional terdefinisi jika dan hanya jika penyebutnya tidak sama dengan nol:

$$x^2 - 16 \neq 0 \implies (x-4)(x+4) \neq 0 \implies x \neq 4 \text{ dan } x \neq -4$$

Jadi, domain dari fungsi $g(x)$ adalah:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 4\} \text{ atau } (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$$

- b) **Asimtot Fungsi $g(x)$:**

- **Asimtot Datar:** Hitung limit fungsi ketika $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 3/x - 4/x^2}{1 - 16/x^2} = 1$$

Karena limitnya menuju 1, persamaan asimtot datarnya adalah $y = 1$.

- **Asimtot Tegak:** Kandidat asimtot tegak adalah $x = 4$ dan $x = -4$ (pembuat nol penyebut).

- Untuk $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x+4} = \frac{5}{8}$$

Karena limitnya berhingga, $x = 4$ **bukan asimtot tegak** (terdapat *removable discontinuity* / lubang).

- Untuk $x = -4$: Evaluasi limit sepihak:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x+1}{x+4} = -\infty$$

(pembilang mendekati -3 , sedangkan penyebut mendekati 0 dari arah positif). Karena salah satu limit sepihak bernilai $\pm\infty$, maka $x = -4$ **adalah asimtot tegak**.

- c) **Perpotongan dengan Asimtot Datar ($y = 1$):** Selesaikan persamaan $g(x) = 1$ pada domain D_g :

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} = 1 \implies x^2 - 3x - 4 = x^2 - 16 \implies -3x = -12 \implies x = 4$$

Namun, nilai $x = 4$ tidak berada di dalam domain D_g . Oleh karena itu, kurva fungsi $g(x)$ **tidak memotong** asimtot datarnya.

Soal 1.5. (8 Poin) Misalkan f dan g adalah dua fungsi yang kontinu di $x = 2$. Diketahui bahwa $f(2) = 3$ dan $\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) - xg(x)] = -2$. Gunakan sifat dan teorema limit untuk

menghitung:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)}{g^2(x) - f(x)}$$

Solusi Soal 1.5

Karena f dan g kontinu di $x = 2$, maka berdasarkan definisi kekontinuan berlaku:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$$

Gunakan sifat linearitas limit pada persamaan kedua untuk mencari $g(2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) - xg(x)] &= -2 \\ 2 \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) &= -2 \\ 2(3) - 2g(2) &= -2 \\ 6 - 2g(2) &= -2 \implies 2g(2) = 8 \implies g(2) = 4 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$.

Dengan menggunakan sifat limit untuk hasil bagi, hasil kali, dan selisih (karena penyebut tidak bernilai nol):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x)}{g^2(x) - f(x)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right)}{\left(\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right)^2 - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{3 \cdot 4}{4^2 - 3} = \frac{12}{16 - 3} = \frac{12}{13}$$

Jadi, nilai dari limit tersebut adalah $\frac{12}{13}$.

Topik 2: Turunan

(51 Poin)

Soal 2.1. (10 Poin) Gunakan definisi turunan berbasis limit $\left(f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ untuk mencari $f'(x)$ dari fungsi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Solusi Soal 2.1

Definisi turunan pertama menggunakan limit:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Substitusikan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2}}{\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}}}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2}}{h\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}}$$

Kalikan pembilang dan penyebut dengan bentuk sekawan $(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})}{h\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+2) - (x+h+2)}{h\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})} \end{aligned}$$

Karena $h \rightarrow 0$ ($h \neq 0$), bagilah pembilang dan penyebut dengan h :

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})}$$

Evaluasi limit dengan mensubstitusi $h = 0$:

$$= \frac{-1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2})} = \frac{-1}{(x+2)(2\sqrt{x+2})} = -\frac{1}{2(x+2)^{3/2}}$$

Jadi, didapatkan turunan pertamanya adalah $f'(x) = -\frac{1}{2(x+2)^{3/2}}$.

Soal 2.2. (12 Poin) Diketahui fungsi sebagai berikut.

$$h(x) = \begin{cases} cx^2 + d, & \text{jika } x \leq 2 \\ 2x^3 - cx, & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

- (6 Poin)** Tentukan nilai c dan d sehingga fungsi $h(x)$ *differentiable* di $x = 2$.
- (6 Poin)** Berdasarkan teorema [Differentiability implies Continuity](#), jelaskan dengan kata-kata Anda sendiri mengapa mencari nilai c dan d pada subsoal (a) mengharuskan Anda menetapkan bahwa $h(x)$ kontinu di $x = 2$ terlebih dahulu.

Solusi Soal 2.2

- Agar fungsi $h(x)$ dapat diturunkan (*differentiable*) di $x = 2$, harus dipenuhi dua syarat:

- Syarat 1: Fungsi Kontinu di $x = 2$** Kekontinuan di $x = 2$ mensyaratkan limit kiri sama dengan limit kanan:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \implies c(2)^2 + d = 2(2)^3 - c(2) \implies 4c + d = 16 - 2c$$

$$6c + d = 16 \quad \text{— (Persamaan 1)}$$

- Syarat 2: Turunan Kiri sama dengan Turunan Kanan di $x = 2$** Turunan kiri dan kanan harus bernilai sama^a:

$$h'_-(2) = h'_+(2)$$

Untuk $x < 2$, turunan dari $h(x) = cx^2 + d$ adalah $2cx$, sehingga $h'_-(2) = 2c(2) = 4c$.

Untuk $x > 2$, turunan dari $h(x) = 2x^3 - cx$ adalah $6x^2 - c$, sehingga $h'_+(2) = 6(2)^2 - c = 24 - c$.

$$4c = 24 - c \implies 5c = 24 \implies c = \frac{24}{5} = 4.8$$

Substitusikan nilai $c = 4.8$ ke dalam Persamaan 1 untuk mencari d :

$$6(4.8) + d = 16 \implies 28.8 + d = 16 \implies d = 16 - 28.8 = -12.8 = -\frac{64}{5}$$

Jadi, nilai c dan d yang memenuhi adalah $c = \frac{24}{5}$ (atau 4.8) dan $d = -\frac{64}{5}$ (atau -12.8).

- b) Teorema *Differentiability implies Continuity* menyatakan bahwa jika suatu fungsi dapat diturunkan di suatu titik, maka ia pasti kontinu di titik tersebut. Artinya, kekontinuan adalah **syarat perlu** (tetapi **bukan syarat cukup**) agar suatu fungsi memiliki turunan. Perlu dicatat bahwa kebalikan dari teorema ini tidak selalu berlaku; fungsi yang kontinu di suatu titik tidak menjamin fungsi tersebut dapat diturunkan di titik tersebut (contohnya fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak memiliki turunan di sana). Oleh karena itu, jika fungsi $h(x)$ tidak kontinu di $x = 2$, grafiknya akan terputus (memiliki lompatan) dan tidak mungkin mendefinisikan kemiringan garis singgung yang tunggal di titik tersebut. Hal ini mengharuskan kita untuk menetapkan syarat kekontinuan (Persamaan 1) terlebih dahulu sebelum menyamakan turunan sepihaknya (Persamaan 2) untuk memastikan keberadaan turunan yang valid di $x = 2$.

^aNotasi $h'_-(a)$ dan $h'_+(a)$ masing-masing menyatakan turunan kiri dan turunan kanan dari fungsi h di $x = a$.

Soal 2.3. (10 Poin) Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut. Perhatikan bahwa Anda tidak perlu menyederhanakan hasil akhirnya.

a) **(5 Poin)** $y = e^{-3x}x^4 \sin(5x)$

b) **(5 Poin)** $y = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{\cos(3x)} \right)^4$

Solusi Soal 2.3

- a) Gunakan aturan perkalian pada tiga fungsi $\frac{d}{dx}(uvw) = u'vw + uv'w + uvw'$: Letak masing-masing fungsi:

$$u = e^{-3x} \implies u' = -3e^{-3x}$$

$$v = x^4 \implies v' = 4x^3$$

$$w = \sin(5x) \implies w' = 5 \cos(5x)$$

Maka:

$$y' = -3e^{-3x}x^4 \sin(5x) + 4e^{-3x}x^3 \sin(5x) + 5e^{-3x}x^4 \cos(5x)$$

Hasil tersebut dapat disederhanakan dengan memfaktorkan $e^{-3x}x^3$:

$$y' = e^{-3x}x^3 [(4 - 3x) \sin(5x) + 5x \cos(5x)]$$

b) Gunakan aturan rantai dan aturan pembagian:

$$y' = 4 \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos(3x)} \right)^3 \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos(3x)} \right]$$

Dengan menggunakan aturan pembagian $\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$:

$$p = \ln(x^2 + 1) \implies p' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$q = \cos(3x) \implies q' = -3\sin(3x)$$

Didapatkan:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos(3x)} \right)^3 \cdot \left[\frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \cos(3x) - \ln(x^2 + 1)(-3\sin(3x))}{\cos^2(3x)} \right] \\ &= 4 \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos(3x)} \right)^3 \cdot \left[\frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \cos(3x) + 3\ln(x^2 + 1)\sin(3x)}{\cos^2(3x)} \right] \end{aligned}$$

Langkah penyederhanaan aljabar secara bertahap:

a) Jabarkan perpangkatan tiga pada bagian depan:

$$4 \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos(3x)} \right)^3 = \frac{4\ln^3(x^2 + 1)}{\cos^3(3x)}$$

b) Samakan penyebut pada pembilang di dalam kurung siku dengan mengalikan suku kedua dengan $(x^2 + 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cos(3x) + 3\ln(x^2 + 1)\sin(3x)}{\cos^2(3x)} &= \frac{\frac{2x \cos(3x) + 3(x^2+1)\ln(x^2+1)\sin(3x)}{x^2+1}}{\cos^2(3x)} \\ &= \frac{2x \cos(3x) + 3(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)\sin(3x)}{(x^2 + 1)\cos^2(3x)} \end{aligned}$$

c) Kalikan kedua bagian pecahan tersebut:

$$y' = \frac{4\ln^3(x^2 + 1)}{\cos^3(3x)} \cdot \frac{2x \cos(3x) + 3(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)\sin(3x)}{(x^2 + 1)\cos^2(3x)}$$

d) Kalikan penyebutnya ($\cos^3(3x) \cdot \cos^2(3x) = \cos^5(3x)$) untuk mendapatkan bentuk pecahan tunggal:

$$y' = \frac{4\ln^3(x^2 + 1) [2x \cos(3x) + 3(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)\sin(3x)]}{(x^2 + 1)\cos^5(3x)}$$

Soal 2.4. (10 Poin) Diberikan fungsi $f(x) = \sec(e^{\sqrt{x}})$. Tentukan:

a) **(5 Poin)** Ekspresi dari $f'(x)$.

- b) (5 Poin) Tentukan persamaan garis singgung dari kurva $f(x)$ pada saat $x = \ln^2(\frac{\pi}{3})$.

Solusi Soal 2.4

- a) Gunakan aturan rantai berulang. Ingat bahwa $\frac{d}{dx} \sec(u) = \sec(u) \tan(u) \cdot u'$:

$$f'(x) = \sec(e^{\sqrt{x}}) \tan(e^{\sqrt{x}}) \cdot \frac{d}{dx} (e^{\sqrt{x}})$$

Karena $\frac{d}{dx} (e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, maka:

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} \sec(e^{\sqrt{x}}) \tan(e^{\sqrt{x}})}{2\sqrt{x}}$$

- b) Tentukan persamaan garis singgung pada $x_0 = \ln^2(\frac{\pi}{3})$:

- **Titik Singgung (y_0):** Karena $\frac{\pi}{3} > 1$, maka $\ln(\frac{\pi}{3}) > 0$, sehingga $\sqrt{x_0} = \ln(\frac{\pi}{3})$. Diperoleh $e^{\sqrt{x_0}} = e^{\ln(\pi/3)} = \frac{\pi}{3}$.

$$y_0 = f(x_0) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos(\pi/3)} = \frac{1}{1/2} = 2$$

Titik singgungnya adalah $(\ln^2(\frac{\pi}{3}), 2)$.

- **Gradien Garis Singgung (m):** Evaluasi $f'(x_0)$ dengan mensubstitusi $x_0 = \ln^2(\frac{\pi}{3})$:

$$m = f'\left(\ln^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right) \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Gunakan $\sec(\frac{\pi}{3}) = 2$ dan $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$:

$$m = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

- **Persamaan Garis Singgung:** Menggunakan rumus garis singgung $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3 \ln\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(x - \ln^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Soal 2.5. (9 Poin) Diberikan fungsi $f(x) = |x^2 - 9|$. Jawab pertanyaan berikut.

- a) (6 Poin) Tanpa menggunakan aturan turunan baku, gunakan definisi turunan sepihak (limit kiri dan limit kanan) untuk membuktikan bahwa fungsi $f(x)$ tidak dapat diturunkan di $x = 3$.
- b) (3 Poin) Apakah $f(x)$ kontinu di $x = 3$? Jelaskan kesimpulan Anda mengaitkan poin (a) dengan grafik fungsi tersebut di sekitar $x = 3$.

Solusi Soal 2.5

Fungsi nilai mutlak $f(x) = |x^2 - 9|$ dapat dipecah di sekitar $x = 3$ menjadi:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{jika } x \geq 3 \\ -(x^2 - 9) = 9 - x^2, & \text{jika } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Serta nilai fungsinya adalah $f(3) = 0$.

a) **Turunan Sepihak di $x = 3$:**

• **Turunan Kanan ($f'_+(3)$):**

$$f'_+(3) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Karena $h \rightarrow 0^+$, maka $3+h > 3$, gunakan ekspresi $f(x) = x^2 - 9$:

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((3+h)^2 - 9) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$

• **Turunan Kiri ($f'_-(3)$):**

$$f'_-(3) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Karena $h \rightarrow 0^-$, maka $3+h < 3$, gunakan ekspresi $f(x) = 9 - x^2$:

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(9 - (3+h)^2) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{9 - (9 + 6h + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-6h - h^2}{h} = -6 \end{aligned}$$

Karena turunan kiri tidak sama dengan turunan kanan ($f'_-(3) = -6 \neq 6 = f'_+(3)$), limit definisi turunan di $x = 3$ tidak ada. Terbukti bahwa fungsi $f(x)$ **tidak dapat diturunkan** di $x = 3$.

b) **Kekontinuan dan Interpretasi Grafis:** Evaluasi limit fungsi di $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (9 - x^2) = 0$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$, fungsi $f(x)$ **kontinu** di $x = 3$.

Hubungan dengan grafik: Meskipun kontinu (grafik tidak terputus), fungsi tidak dapat diturunkan di $x = 3$ karena grafiknya memiliki **sudut tajam (corner)** pada titik $(3, 0)$. Pada sudut tajam tersebut, perubahan kemiringan terjadi secara drastis dari -6 menjadi 6 , sehingga tidak ada garis singgung unik yang dapat didefinisikan.

