

PR 1
KALKULUS 1 SEMESTER PENDEK 2026
FAKULTAS ILMU KOMPUTER UNIVERSITAS INDONESIA

Topik: **Fungsi dan Limit**

LEMBAR SOLUSI ASISTENSI

Topik 1: Pertidaksamaan

(10 Poin)

Soal 1.1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

$$\frac{2x - 5}{x - 3} \leq 1$$

Solusi Soal 1.1

Pindahkan semua suku ke ruas kiri:

$$\begin{aligned}\frac{2x - 5}{x - 3} - 1 &\leq 0 \\ \frac{2x - 5 - (x - 3)}{x - 3} &\leq 0 \\ \frac{x - 2}{x - 3} &\leq 0\end{aligned}$$

Pembuat nol untuk pembilang adalah $x = 2$, dan pembuat nol untuk penyebut adalah $x = 3$ (syarat penyebut $x \neq 3$).

Melakukan uji tanda pada garis bilangan untuk pecahan $\frac{x-2}{x-3}$:

- Untuk $x < 2$, nilai pecahan positif (+).
- Untuk $2 \leq x < 3$, nilai pecahan negatif atau nol (-).
- Untuk $x > 3$, nilai pecahan positif (+).

Maka, himpunan penyelesaiannya adalah:

$$HP = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\} \quad \text{atau} \quad [2, 3)$$

Soal 1.2. Selesaikan pertidaksamaan nilai mutlak berikut:

$$|3x - 2| > |x + 4|$$

Solusi Soal 1.2

Kedua ruas bernilai non-negatif, sehingga kita dapat mengkuadratkan kedua ruas:

$$\begin{aligned}(3x - 2)^2 &> (x + 4)^2 \\ (3x - 2)^2 - (x + 4)^2 &> 0\end{aligned}$$

Menggunakan rumus selisih kuadrat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$((3x - 2) - (x + 4)) ((3x - 2) + (x + 4)) > 0$$

$$(2x - 6)(4x + 2) > 0$$

$$8(x - 3) \left(x + \frac{1}{2} \right) > 0$$

Pembuat nol dari pertidaksamaan tersebut adalah $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 3$.
Melakukan uji tanda:

- Daerah positif berada pada $x < -\frac{1}{2}$ atau $x > 3$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah:

$$HP = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ atau } x > 3 \right\} \quad \text{atau} \quad \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \cup (3, \infty)$$

Topik 2: Fungsi Aljabar, Trigonometri, dan Transendental

(15 Poin)

Soal 2.1. Tentukan domain dari fungsi aljabar berikut:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2 - x}$$

Solusi Soal 2.1

Syarat agar fungsi terdefinisi:

- a) Suku di dalam akar harus non-negatif:

$$4 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 4 \implies -2 \leq x \leq 2$$

- b) Penyebut tidak boleh sama dengan nol:

$$x^2 - x \neq 0 \implies x(x - 1) \neq 0 \implies x \neq 0 \text{ dan } x \neq 1$$

Irisan dari kedua syarat di atas memberikan domain fungsi f :

$$D_f = [-2, 2] \setminus \{0, 1\} = [-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2]$$

Soal 2.2. Tentukan semua nilai $x \in [0, 2\pi]$ yang memenuhi persamaan trigonometri berikut:

$$2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$$

Solusi Soal 2.2

Misalkan $u = \sin(x)$. Persamaan kuadrat menjadi:

$$2u^2 - 3u + 1 = 0 \implies (2u - 1)(u - 1) = 0$$

Maka diperoleh $u = \frac{1}{2}$ atau $u = 1$.

- Untuk $\sin(x) = \frac{1}{2}$ pada interval $[0, 2\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{atau} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

- Untuk $\sin(x) = 1$ pada interval $[0, 2\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

Soal 2.3. Diberikan fungsi transendental $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$. Tentukan domain dari fungsi tersebut.

Solusi Soal 2.3

Fungsi logaritma natural terdefinisi jika dan hanya jika argumennya positif:

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

Faktorkan persamaan kuadrat tersebut:

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$

Pembuat nol adalah $x = 1$ dan $x = 2$. Daerah yang bernilai positif adalah ketika $x < 1$ atau $x > 2$.

Jadi, domain fungsi tersebut adalah:

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

Soal 2.4. Nyatakan fungsi eksponensial $y = 3^{2x-1}$ ke dalam basis e (yaitu bentuk $y = e^{g(x)}$).

Solusi Soal 2.4

Menggunakan identitas $a^b = e^{b \ln(a)}$:

$$y = 3^{2x-1} = e^{(2x-1) \ln(3)}$$

Di sini $g(x) = (2x - 1) \ln(3) = 2 \ln(3)x - \ln(3)$.

Topik 3: Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

(10 Poin)

Soal 3.1. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^3 - 3x$ merupakan fungsi genap, fungsi ganjil, atau bukan keduanya. Buktikan secara aljabar!

Solusi Soal 3.1

Untuk menentukan jenis fungsi, kita substitusikan $-x$ ke dalam fungsi:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 3(-x) \\ &= -x^3 + 3x \\ &= -(x^3 - 3x) \end{aligned}$$

$$= -f(x)$$

Karena $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x dalam domain f , maka $f(x)$ adalah **fungsi ganjil**.

Soal 3.2. Periksa ke-genap-an atau ke-ganjil-an dari fungsi berikut:

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$$

Solusi Soal 3.2

Substitusikan $-x$ ke dalam $g(x)$:

$$g(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2 + 1}$$

Karena $\cos(-x) = \cos(x)$ (sifat fungsi genap trigonometri) dan $(-x)^2 = x^2$:

$$g(-x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 1} = g(x)$$

Karena $g(-x) = g(x)$ untuk setiap x dalam domain g , maka $g(x)$ adalah **fungsi genap**.

Topik 4: Fungsi Injektif dan Surjektif

(10 Poin)

Soal 4.1. Buktikan secara formal aljabar apakah fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 3x - 5$ merupakan fungsi injektif (satu-satu).

Solusi Soal 4.1

Untuk membuktikan bahwa f adalah injektif, kita tunjukkan bahwa jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 - 5 &= 3x_2 - 5 \end{aligned}$$

Tambahkan kedua ruas dengan 5:

$$3x_1 = 3x_2$$

Bagi kedua ruas dengan 3:

$$x_1 = x_2$$

Karena terbukti bahwa $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, maka f adalah **fungsi injektif**.

Soal 4.2. Tentukan apakah fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ yang didefinisikan oleh $g(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif. Berikan pembuktiannya!

Solusi Soal 4.2

Untuk membuktikan $g(x)$ surjektif dengan kodomain $[0, \infty)$, kita harus menunjukkan bahwa untuk setiap $y \in [0, \infty)$, terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $g(x) = y$.

Ambil sebarang $y \in [0, \infty)$. Kita ingin mencari $x \in \mathbb{R}$ sehingga:

$$x^2 = y$$

Karena $y \geq 0$, nilai $\sqrt{y}$ terdefinisi sebagai bilangan riil. Pilih $x = \sqrt{y}$ (yang mana $x \in \mathbb{R}$). Jika kita evaluasi:

$$g(x) = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Karena selalu ada $x \in \mathbb{R}$ untuk setiap $y \geq 0$ sedemikian sehingga $g(x) = y$, maka g adalah ****fungsi surjektif****.

Topik 5: Grafik Fungsi**(15 Poin)**

Soal 5.1. Sketsakan grafik fungsi kuadrat berikut dengan menentukan titik potong sumbu- x , sumbu- y , dan titik puncak:

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Solusi Soal 5.1

Langkah-langkah sketsa grafik:

- a) **Arah parabola:** Karena koefisien x^2 bernilai negatif ($a = -1$), grafik terbuka ke bawah.
- b) **Titik potong sumbu- y ($x = 0$):** $f(0) = -3 \implies (0, -3)$.
- c) **Titik potong sumbu- x ($f(x) = 0$):**

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies (x - 1)(x - 3) = 0$$

Diperoleh titik potong di $x = 1$ dan $x = 3$, yaitu $(1, 0)$ dan $(3, 0)$.

- d) **Titik puncak (x_p, y_p):**

$$x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

$$y_p = f(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$$

Titik puncak berada di $(2, 1)$.

Sketsakan kurva parabola mulus yang melewati titik-titik tersebut.

Soal 5.2. Gambarkan sketsa grafik fungsi pecah-pecah (piecewise) berikut:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{jika } x < 0 \\ x^2 & \text{jika } 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{jika } x > 2 \end{cases}$$

Solusi Soal 5.2**Langkah-langkah sketsa grafik:**

- Untuk interval $(-\infty, 0)$: Sketsakan garis lurus $y = -x$ dengan lingkaran terbuka di titik $(0, 0)$.
- Untuk interval $[0, 2]$: Sketsakan kurva parabola $y = x^2$ dari titik asal $(0, 0)$ hingga $(2, 4)$, dengan kedua ujung berupa lingkaran tertutup.
- Untuk interval $(2, \infty)$: Sketsakan garis mendatar $y = 4$ mulai dari $x > 2$, dengan lingkaran terbuka di $(2, 4)$ yang berimpit dengan akhir kurva sebelumnya.

Grafik ini kontinu di setiap titiknya.

Soal 5.3. Bagaimanakah grafik fungsi $g(x) = |x - 2| + 1$ diperoleh dari grafik fungsi dasar $f(x) = |x|$ melalui transformasi grafik? Jelaskan!

Solusi Soal 5.3

Transformasi grafik fungsi dasar $f(x) = |x|$ menjadi $g(x) = |x - 2| + 1$:

- Pergeseran Horizontal:** Mengganti x dengan $x - 2$ menggeser grafik $f(x) = |x|$ ke arah kanan sejauh 2 satuan.
- Pergeseran Vertikal:** Menambahkan $+1$ di akhir fungsi menggeser grafik tersebut ke arah atas sejauh 1 satuan.

Titik sudut asal $(0, 0)$ bergeser ke puncak baru di $(2, 1)$.

Soal 5.4. Sketsakan grafik fungsi trigonometri $y = 2 \cos(2x)$ pada interval $[0, \pi]$.

Solusi Soal 5.4

Grafik fungsi $y = 2 \cos(2x)$:

- **Amplitudo:** $A = 2$. Nilai maksimum adalah 2 dan minimum adalah -2.
- **Periode:** $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Berarti dalam interval $[0, \pi]$ terdapat tepat satu gelombang cosinus penuh.
- **Titik-titik kunci:**
 - Untuk $x = 0 \implies y = 2 \cos(0) = 2$ (Titik puncak atas)
 - Untuk $x = \frac{\pi}{4} \implies y = 2 \cos(\pi/2) = 0$ (Titik potong sumbu-x)
 - Untuk $x = \frac{\pi}{2} \implies y = 2 \cos(\pi) = -2$ (Titik puncak bawah)
 - Untuk $x = \frac{3\pi}{4} \implies y = 2 \cos(3\pi/2) = 0$ (Titik potong sumbu-x)
 - Untuk $x = \pi \implies y = 2 \cos(2\pi) = 2$ (Titik puncak atas)

Tarik kurva cosinus mulus yang menghubungkan kelima titik kunci tersebut.

Topik 6: Invers Fungsi

(15 Poin)

Soal 6.1. Tentukan invers dari fungsi rasional berikut beserta domain dari inversnya:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, \quad x \neq 3$$

Solusi Soal 6.1

Misalkan $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-3} \\ y(x-3) &= 2x+1 \\ yx-3y &= 2x+1 \\ yx-2x &= 3y+1 \\ x(y-2) &= 3y+1 \\ x &= \frac{3y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Jadi, fungsi inversnya adalah:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

Domain dari fungsi invers f^{-1} adalah semua bilangan riil kecuali pembuat nol penyebut:

$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$$

Soal 6.2. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 5$ dengan domain terbatas $x \geq 2$. Tentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$.

Solusi Soal 6.2

Tuliskan fungsi dalam bentuk kuadrat sempurna:

$$y = x^2 - 4x + 4 + 1 \implies y = (x-2)^2 + 1$$

Nyatakan x dalam y :

$$(x-2)^2 = y-1 \implies x-2 = \pm\sqrt{y-1} \implies x = 2 \pm \sqrt{y-1}$$

Karena domain asal dibatasi pada $x \geq 2$, kita memilih tanda positif:

$$x = 2 + \sqrt{y-1}$$

Maka rumus fungsi inversnya adalah:

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$$

dengan domain $x \geq 1$.

Soal 6.3. Diberikan fungsi eksponen $f(x) = 2^{x-3} + 4$. Tentukan invers dari fungsi tersebut.

Solusi Soal 6.3

Misalkan $y = 2^{x-3} + 4$:

$$\begin{aligned}y - 4 &= 2^{x-3} \\ \log_2(y - 4) &= x - 3 \\ x &= 3 + \log_2(y - 4)\end{aligned}$$

Maka invers dari fungsi eksponen tersebut adalah:

$$f^{-1}(x) = 3 + \log_2(x - 4)$$

dengan domain $x > 4$.

Soal 6.4. Jika $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = \frac{x}{x+1}$, tentukan $(g \circ f)^{-1}(x)$.

Solusi Soal 6.4

Metode 1: Cari fungsi komposisi terlebih dahulu

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(3x - 2) = \frac{3x - 2}{(3x - 2) + 1} = \frac{3x - 2}{3x - 1}$$

Cari invers dari $h(x)$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{3x - 2}{3x - 1} \\ y(3x - 1) &= 3x - 2 \\ 3xy - y &= 3x - 2 \\ 3xy - 3x &= y - 2 \\ x(3y - 3) &= y - 2 \\ x &= \frac{y - 2}{3y - 3}\end{aligned}$$

Maka,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3x - 3} = \frac{x - 2}{3(x - 1)}$$

Topik 7: Kekontinuan Fungsi**(10 Poin)**

Soal 7.1. Diberikan fungsi pecahan (piecewise) berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{jika } x < 1 \\ a & \text{jika } x = 1 \\ 2x + b & \text{jika } x > 1 \end{cases}$$

Tentukan nilai a dan b agar fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 1$. Gunakan 3 syarat kekontinuan fungsi untuk menjabarkannya.

Solusi Soal 7.1

Agar fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 1$, 3 syarat kekontinuan berikut harus terpenuhi:

- a) $f(1)$ terdefinisi. Dari fungsi, $f(1) = a$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ada, yang berarti limit kiri harus sama dengan limit kanan.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Langkah 1: Menghitung Limit Kiri

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

Langkah 2: Menghitung Limit Kanan

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + b) = 2(1) + b = 2 + b$$

Langkah 3: Menentukan nilai a dan b Agar limitnya ada, limit kiri harus sama dengan limit kanan:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \implies 2 = 2 + b \implies b = 0$$

Maka nilai limit fungsi tersebut adalah $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Agar fungsi kontinu di $x = 1$, maka nilai fungsi harus sama dengan nilai limit:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \implies a = 2$$

Jadi, nilai yang memenuhi adalah $a = 2$ dan $b = 0$.

Soal 7.2. Tunjukkan apakah fungsi $g(x) = \frac{1}{x-2}$ kontinu pada interval $[0, 4]$. Jika tidak, jelaskan syarat kontinuitas mana yang dilanggar dan di titik mana pelanggaran itu terjadi.

Solusi Soal 7.2

Fungsi $g(x) = \frac{1}{x-2}$ tidak didefinisikan pada $x = 2$, karena penyebut bernilai nol. Titik $x = 2$ berada di dalam interval tertutup $[0, 4]$. Berdasarkan syarat kontinuitas pertama:

- $g(2)$ harus terdefinisi.

Karena $g(2)$ tidak terdefinisi (menghasilkan pembagian dengan nol), maka syarat kontinuitas dilanggar pada titik $x = 2$.

Kesimpulannya, fungsi $g(x)$ tidak kontinu pada interval $[0, 4]$.

Topik 8: Berbagai Soal Limit**(15 Poin)**

Soal 8.1. Hitung nilai limit aljabar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

Solusi Soal 8.1

Substitusi langsung menghasilkan bentuk tak tentu $0/0$. Faktorkan pembilang dan penyebut:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$$

Untuk $x \neq 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

Soal 8.2. Tentukan nilai dari limit bentuk akar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x-7}$$

Solusi Soal 8.2

Substitusi langsung menghasilkan $0/0$. Kalikan pembilang dan penyebut dengan sekawan dari pembilang:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x-7} \cdot \frac{\sqrt{x-3} + 2}{\sqrt{x-3} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-3) - 4}{(x-7)(\sqrt{x-3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x-3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x-3} + 2} \quad (\text{karena } x \neq 7) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Soal 8.3. Hitung nilai limit trigonometri berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$$

Solusi Soal 8.3

Menggunakan teorema limit trigonometri dasar $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ dan $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(t)}{t} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan(5x)} \cdot \frac{3}{5} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

Soal 8.4. Tentukan nilai limit trigonometri berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Solusi Soal 8.4

Gunakan identitas trigonometri $1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x} \right)^2 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{2 \cdot (x/2)} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Soal 8.5. Tentukan limit di tak hingga berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^3 + x^2 - 4}$$

Solusi Soal 8.5

Bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari penyebut, yaitu x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{2}{5}$$

Soal 8.6. Selesaikan limit di tak hingga bentuk selisih akar berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$$

Solusi Soal 8.6

Kalikan dengan bentuk sekawannya:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 2x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2(1 + 4/x)} + \sqrt{x^2(1 - 2/x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x\sqrt{1 + 4/x} + x\sqrt{1 - 2/x}} \quad (\text{karena } x > 0, \sqrt{x^2} = x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + 4/x} + \sqrt{1 - 2/x}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{6}{2} = 3\end{aligned}$$

Soal 8.7. Gunakan Teorema Apit untuk membuktikan dan menentukan nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solusi Soal 8.7

Perhatikan bahwa fungsi cosinus selalu bernilai antara -1 dan 1 :

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Kalikan semua ruas dengan x^2 (karena $x^2 \geq 0$, arah pertidaksamaan tidak berubah):

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Hitung limit untuk kedua fungsi pengapit saat $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$$

Berdasarkan Teorema Apit, karena limit kiri dan kanan bernilai sama yaitu 0 , maka:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Soal 8.8. Tentukan nilai limit satu arah (limit kiri dan limit kanan) berikut di $x = 0$:

$$f(x) = \frac{|x|\lfloor x \rfloor}{x}$$

Keterangan: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x (fungsi floor).

Solusi Soal 8.8

Ingat definisi nilai mutlak $|x| = x$ jika $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ jika $x < 0$, serta definisi fungsi floor $\lfloor x \rfloor$ yaitu bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x .

- **Limit Kiri** ($x \rightarrow 0^-$): Untuk $-1 < x < 0$, kita memiliki $|x| = -x$ dan $\lfloor x \rfloor = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \cdot (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

- **Limit Kanan** ($x \rightarrow 0^+$): Untuk $0 < x < 1$, kita memiliki $|x| = x$ dan $\lfloor x \rfloor = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\lfloor x \rfloor}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot 0}{x} = 0$$

Karena $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\lfloor x \rfloor}{x}$ tidak ada.