

KUIS 6 KALKULUS 1 (SP 2026)

Materi: Limit Jumlah Riemann, Integral Parsial, & Luas Permukaan Putar • Kode Soal: A

1. **Soal (30 poin):** Hitung nilai integral tentu berikut dengan menggunakan definisi integral sebagai limit jumlah Riemann. Jangan menggunakan aturan antiturunan.

$$\int_1^5 (\pi x^2 + 1) dx$$

Solusi Lengkap & Rubrik Penilaian:

Tahap 1 (Menentukan Partisi dan Titik Sampel):

Interval $[a, b] = [1, 5]$ dibagi menjadi n sub-interval selebar Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n} \text{ [5 poin]}$$

Pilih titik ujung kanan untuk x_i :

$$x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{4i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Tahap 2 (Evaluasi Fungsi $f(x_i)$ dan Menyusun Jumlah Riemann):

Substitusikan x_i ke $f(x) = \pi x^2 + 1$:

[10 poin]

$$f(x_i) = \pi \left(1 + \frac{4i}{n}\right)^2 + 1 = \pi \left(1 + \frac{8i}{n} + \frac{16i^2}{n^2}\right) + 1 = (\pi + 1) + \frac{8\pi}{n}i + \frac{16\pi}{n^2}i^2$$

Jumlah Riemann (R_n) didefinisikan sebagai:

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^n \left[(\pi + 1) + \frac{8\pi}{n}i + \frac{16\pi}{n^2}i^2 \right] \frac{4}{n}$$

Gunakan sifat linearitas sumasi:

$$R_n = \frac{4}{n} \left[(\pi + 1) \sum_{i=1}^n 1 + \frac{8\pi}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{16\pi}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 \right]$$

Tahap 3 (Substitusi Rumus Sumasi Khusus):

[10 poin]

Gunakan rumus sumasi: $\sum_{i=1}^n 1 = n$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, dan $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$R_n = \frac{4}{n} \left[(\pi + 1)n + \frac{8\pi}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{16\pi}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

Sederhanakan setiap suku:

$$R_n = 4(\pi + 1) + 16\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{32\pi}{3} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Tahap 4 (Evaluasi Limit $n \rightarrow \infty$):

[5 poin]

$$\begin{aligned} \int_1^5 (\pi x^2 + 1) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 4(\pi + 1) + 16\pi(1 + 0) + \frac{32\pi}{3}(2 + 0 + 0) \\ &= 4\pi + 4 + 16\pi + \frac{64\pi}{3} = 20\pi + \frac{64\pi}{3} + 4 = \frac{124\pi}{3} + 4 \end{aligned}$$

2. **Soal (30 poin):** Daerah R dibatasi oleh kurva $y = \arctan(x)$ dan sumbu x dalam interval $0 < x < 1$. Hitunglah luas daerah R tersebut menggunakan metode parsial (*integration by parts*). Dalam soal ini, Anda tidak diperkenankan menggunakan rumus antiturunan dari *arcus tangent*.

Solusi Lengkap & Rubrik Penilaian:

Tahap 1 (Formulasi Luas Daerah):

Karena $y = \arctan(x) \geq 0$ pada interval $0 < x < 1$, luas daerah R dinyatakan oleh:

[5 poin]

$$L = \int_0^1 \arctan(x) dx$$

Tahap 2 (Pengintegralan Parsial):

Gunakan rumus pengintegralan parsial: $\int u dv = uv - \int v du$.

[10 poin]

- Misalkan $u = \arctan(x) \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx$
- Misalkan $dv = dx \implies v = x$

Diperoleh:

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Tahap 3 (Pengintegralan Suku Sisa dengan Substitusi):

[10 poin]

Untuk $\int \frac{x}{1+x^2} dx$, misalkan $w = 1 + x^2 \implies dw = 2x dx \implies x dx = \frac{1}{2} dw$:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln|w| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Sehingga antiturunan dari $\arctan(x)$ adalah:

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Tahap 4 (Evaluasi Batas Tentu $[0, 1]$):

[5 poin]

$$\begin{aligned} L &= \left[x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \left(1 \cdot \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln(1+1^2) \right) - \left(0 \cdot \arctan(0) - \frac{1}{2} \ln(1+0^2) \right) \end{aligned}$$

Karena $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ dan $\ln(1) = 0$:

$$L = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - (0 - 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

3. **Soal (40 poin):** Hitunglah luas permukaan *Terompet Jibril* yang diperoleh dengan memutar kurva $y = \frac{1}{x}$ pada interval $1 \leq x \leq 5$.

Hint: Gunakan teknik substitusi $u = x^2$, lalu substitusi trigonometri $u = \tan \theta$, dilanjutkan dengan teknik substitusi ketiga (temukan teknik yang tepat), dan dekomposisi pecahan parsial.

Solusi Lengkap & Rubrik Penilaian:

Tahap 1 (Formulasi Luas Permukaan Benda Putar):

[5 poin]

Rumus luas permukaan benda putar terhadap sumbu x :

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Dengan $y = \frac{1}{x}$, diperoleh $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \implies 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^4} = \frac{x^4+1}{x^4}$.

$$A = 2\pi \int_1^5 \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} dx = 2\pi \int_1^5 \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} dx$$

Tahap 2 (Substitusi Pertama: $u = x^2$):

[10 poin]

Misalkan $u = x^2 \implies du = 2x dx \implies \frac{dx}{x^3} = \frac{x dx}{x^4} = \frac{du}{2u^2}$.

Batas integral: $x = 1 \implies u = 1$ dan $x = 5 \implies u = 25$.

$$A = 2\pi \int_1^{25} \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2} \cdot \frac{du}{2} = \pi \int_1^{25} \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2} du$$

Tahap 3 (Substitusi Kedua: $u = \tan \theta$ & Substitusi Ketiga: $t = \sin \theta$):

[10 poin]

• **Substitusi Trigonometri:** Misalkan $u = \tan \theta \implies du = \sec^2 \theta d\theta$ dan $\sqrt{u^2+1} = \sec \theta$:

$$\int \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2} du = \int \frac{\sec \theta}{\tan^2 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \int \frac{\sec^3 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos \theta \sin^2 \theta} d\theta$$

• **Substitusi Ketiga:** Ubah menjadi $\int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta} d\theta$. Misalkan $t = \sin \theta \implies dt = \cos \theta d\theta$:

$$\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)}$$

Tahap 4 (Dekomposisi Pecahan Parsial & Pengintegralan):

[10 poin]

Uraikan integran dengan pecahan parsial:

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{(1-t^2) + t^2}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$$

Integrasikan terhadap t :

$$\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} \right) dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \ln |1-t| + \frac{1}{2} \ln |1+t| = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

Karena $t = \sin \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$, diperoleh substitusi balik ke u :

$$-\frac{1}{t} = -\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \ln (\sqrt{u^2+1} + u)$$

Sehingga antiturunan terhadap u adalah $F(u) = -\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \ln (\sqrt{u^2+1} + u)$.

Tahap 5 (Evaluasi Batas Integral $[1, 25]$):

[5 poin]

$$A = \pi \left[-\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} + \ln (\sqrt{u^2+1} + u) \right]_1^{25}$$

$$F(25) = -\frac{\sqrt{626}}{25} + \ln(\sqrt{626} + 25)$$

$$F(1) = -\frac{\sqrt{2}}{1} + \ln(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$$

Diperoleh hasil akhir:

$$A = \pi \left[\sqrt{2} - \frac{\sqrt{626}}{25} + \ln \left(\frac{\sqrt{626} + 25}{\sqrt{2} + 1} \right) \right]$$