

KUIS 5 KALKULUS 1 (SP 2026)

Materi: Teknik Pengintegralan Lanjutan • Kode Soal: B

1. Soal (30 poin): Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int 6x^2 e^{-3x} dx$$

METODE 1: Parsial Konvensional (Standar)

Gunakan rumus integral parsial: $\int u dv = uv - \int v du$.

Tahap 1 (Parsial Pertama):

Misalkan $u = 6x^2 \Rightarrow du = 12x dx$, dan $dv = e^{-3x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$. [10 poin]

$$\int 6x^2 e^{-3x} dx = 6x^2 \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} \right) - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} \right) (12x) dx = -2x^2 e^{-3x} + 4 \int x e^{-3x} dx$$

Tahap 2 (Parsial Kedua):

Untuk $\int x e^{-3x} dx$, misalkan $u_2 = x \Rightarrow du_2 = dx$, dan $dv_2 = e^{-3x} dx \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{3}e^{-3x}$. [10 poin]

$$\int x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}x e^{-3x} - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} \right) dx = -\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

Tahap 3 (Hasil Akhir):

Substitusikan hasil parsial kedua kembali ke persamaan awal: [10 poin]

$$\int 6x^2 e^{-3x} dx = -2x^2 e^{-3x} + 4 \left(-\frac{1}{3}x e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} \right) + C = -\frac{2}{9}e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + C$$

METODE ALTERNATIF: Metode Tabular (DI Method)

Buat tabel turunan (D) dan integral (I) dengan tanda berselang-seling:

Tanda	Turunan (D)	Integral (I)
+	$6x^2$	e^{-3x}
-	$12x$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
+	12	$\frac{1}{9}e^{-3x}$
-	0	$-\frac{1}{27}e^{-3x}$

Kalikan secara diagonal pasangan D dan I beserta tandanya:

$$\begin{aligned}\int 6x^2 e^{-3x} dx &= (+1)(6x^2) \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} \right) + (-1)(12x) \left(\frac{1}{9}e^{-3x} \right) + (+1)(12) \left(-\frac{1}{27}e^{-3x} \right) + C \\&= -2x^2 e^{-3x} - \frac{4}{3}x e^{-3x} - \frac{4}{9}e^{-3x} + C \\&= -\frac{2}{9}e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2) + C\end{aligned}$$

2. Soal (35 poin): Hitung nilai integral tentu berikut:

$$\int_3^4 \frac{4}{x^2 - 8x + 12} dx$$

METODE 1: Pecahan Parsial (Dekomposisi Standar)

Tahap 1 (Faktorisasi Penyebut):

Faktorkan penyebut kuadrat: $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$.

[5 poin]

Tahap 2 (Dekomposisi Pecahan Parsial):

Tuliskan sebagai pecahan parsial:

$$\frac{4}{(x-2)(x-6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-6} \implies 4 = A(x-6) + B(x-2)$$

Substitusikan pembuat nol penyebut:

- Untuk $x = 6 \implies 4 = B(6-2) = 4B \implies B = 1$
- Untuk $x = 2 \implies 4 = A(2-6) = -4A \implies A = -1$

[10 poin]

Sehingga integrand menjadi: $\frac{4}{x^2 - 8x + 12} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6}$.

Tahap 3 (Pengintegralan Tak Tentu):

[10 poin]

$$\int \left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-6| = \ln \left| \frac{x-6}{x-2} \right|$$

Tahap 4 (Evaluasi Batas Tentu):

[10 poin]

$$\left[\ln \left| \frac{x-6}{x-2} \right| \right]_3^4 = \ln \left| \frac{4-6}{4-2} \right| - \ln \left| \frac{3-6}{3-2} \right| = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$$

METODE ALTERNATIF: Melengkapi Kuadrat Sempurna (Completing the Square)

Lengkapi kuadrat sempurna pada penyebut:

$$x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 16 + 12 = (x-4)^2 - 2^2$$

Misalkan $u = x - 4 \implies du = dx$.

Perubahan batas integral: $x = 4 \implies u = 0$ dan $x = 3 \implies u = -1$.

Gunakan rumus baku $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|$ dengan $a = 2$:

$$\int_{-1}^0 \frac{4}{u^2 - 2^2} du = \left[4 \cdot \frac{1}{2(2)} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| \right]_{-1}^0 = \left[\ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| \right]_{-1}^0$$

Evaluasi batas atas ($u = 0$) dan batas bawah ($u = -1$):

$$\text{Hasil} = \ln \left| \frac{0-2}{0+2} \right| - \ln \left| \frac{-1-2}{-1+2} \right| = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$$

3. Soal (35 poin): Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{9x^2}{(\sqrt{1-4x^2})^3} dx$$

Solusi & Rubrik Penilaian:

Tahap 1 (Substitusi Trigonometri):

Gunakan pemisalan $2x = \sin \theta \implies x = \frac{1}{2} \sin \theta$.

[5 poin]

Turunan dari x adalah $dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$, dan akar kuadrat menjadi $\sqrt{1 - 4x^2} = \cos \theta$.

[5 poin]

Tahap 2 (Substitusi ke Integrand):

Substitusikan seluruh komponen ke dalam integral:

$$\int \frac{9 \left(\frac{1}{4} \sin^2 \theta\right)}{\cos^3 \theta} \cdot \frac{1}{2} \cos \theta d\theta = \frac{9}{8} \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{9}{8} \int \tan^2 \theta d\theta \text{ [10 poin]}$$

Tahap 3 (Pengintegralan):

Gunakan identitas trigono $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$:

$$\frac{9}{8} \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \frac{9}{8} (\tan \theta - \theta) + C \text{ [5 poin]}$$

Tahap 4 (Kembalikan ke Variabel x):

Berdasarkan segitiga siku-siku dengan sisi depan $2x$, miring 1, dan samping $\sqrt{1 - 4x^2}$:

$$\tan \theta = \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \quad \text{dan} \quad \theta = \arcsin(2x) \text{ [10 poin]}$$

Diperoleh hasil akhir:

$$= \frac{9}{8} \left(\frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} - \arcsin(2x) \right) + C = \frac{9x}{4\sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{9}{8} \arcsin(2x) + C$$