

KUIS 5 KALKULUS 1 (SP 2026)

Materi: Teknik Pengintegralan Lanjutan • Kode Soal: A

1. Soal (30 poin): Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int 4x^2 e^{-2x} dx$$

METODE 1: Parsial Konvensional (Standar)

Gunakan rumus integral parsial: $\int u dv = uv - \int v du$.

Tahap 1 (Parsial Pertama):

Misalkan $u = 4x^2 \Rightarrow du = 8x dx$, dan $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

[10 poin]

$$\int 4x^2 e^{-2x} dx = 4x^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) (8x) dx = -2x^2 e^{-2x} + 4 \int x e^{-2x} dx$$

Tahap 2 (Parsial Kedua):

Untuk $\int x e^{-2x} dx$, misalkan $u_2 = x \Rightarrow du_2 = dx$, dan $dv_2 = e^{-2x} dx \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{2}e^{-2x}$.

[10 poin]

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x e^{-2x} - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx = -\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Tahap 3 (Hasil Akhir):

Substitusikan hasil parsial kedua kembali ke persamaan awal:

[10 poin]

$$\int 4x^2 e^{-2x} dx = -2x^2 e^{-2x} + 4 \left(-\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + C = -e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C$$

METODE ALTERNATIF: Metode Tabular (DI Method)

Buat tabel turunan (D) dan integral (I) dengan tanda berselang-seling:

Tanda	Turunan (D)	Integral (I)
+	$4x^2$	e^{-2x}
-	$8x$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
+	8	$\frac{1}{4}e^{-2x}$
-	0	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$

Kalikan secara diagonal pasangan D dan I beserta tandanya:

$$\begin{aligned}\int 4x^2 e^{-2x} dx &= (+1)(4x^2) \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + (-1)(8x) \left(\frac{1}{4}e^{-2x}\right) + (+1)(8) \left(-\frac{1}{8}e^{-2x}\right) + C \\ &= -2x^2 e^{-2x} - 2x e^{-2x} - e^{-2x} + C \\ &= -e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C\end{aligned}$$

2. Soal (35 poin): Hitung nilai integral tentu berikut:

$$\int_3^4 \frac{6}{x^2 - 7x + 10} dx$$

METODE 1: Pecahan Parsial (Dekomposisi Standar)

Tahap 1 (Faktorisasi Penyebut):

Faktorkan penyebut kuadrat: $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$.

[5 poin]

Tahap 2 (Dekomposisi Pecahan Parsial):

Tuliskan sebagai pecahan parsial:

$$\frac{6}{(x-2)(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} \implies 6 = A(x-5) + B(x-2)$$

Substitusikan pembuat nol penyebut:

- Untuk $x = 5 \implies 6 = B(5 - 2) = 3B \implies B = 2$
- Untuk $x = 2 \implies 6 = A(2 - 5) = -3A \implies A = -2$

[10 poin]

Sehingga integrand menjadi: $\frac{6}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-5}$.

Tahap 3 (Pengintegralan Tak Tentu):

[10 poin]

$$\int \left(-\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x-5} \right) dx = -2 \ln |x-2| + 2 \ln |x-5| = 2 \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right|$$

Tahap 4 (Evaluasi Batas Tentu):

[10 poin]

$$\left[2 \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| \right]_3^4 = 2 \ln \left| \frac{4-5}{4-2} \right| - 2 \ln \left| \frac{3-5}{3-2} \right| = 2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) - 2 \ln(2) = -4 \ln(2)$$

METODE ALTERNATIF: Melengkapi Kuadrat Sempurna (Completing the Square)

Lengkapi kuadrat sempurna pada penyebut:

$$x^2 - 7x + 10 = \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} + 10 = \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2$$

Misalkan $u = x - \frac{7}{2} \implies du = dx$.

Perubahan batas integral: $x = 4 \implies u = \frac{1}{2}$ dan $x = 3 \implies u = -\frac{1}{2}$.

Gunakan rumus baku $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right|$ dengan $a = \frac{3}{2}$:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{6}{u^2 - (3/2)^2} du = \left[6 \cdot \frac{1}{2(3/2)} \ln \left| \frac{u-3/2}{u+3/2} \right| \right]_{-1/2}^{1/2} = \left[2 \ln \left| \frac{u-3/2}{u+3/2} \right| \right]_{-1/2}^{1/2}$$

Evaluasi batas atas dan bawah:

$$\text{Hasil} = 2 \ln \left| \frac{1/2 - 3/2}{1/2 + 3/2} \right| - 2 \ln \left| \frac{-1/2 - 3/2}{-1/2 + 3/2} \right| = 2 \ln \left(\frac{1}{2} \right) - 2 \ln(2) = -4 \ln(2)$$

3. Soal (35 poin): Tentukan hasil integral tak tentu berikut:

$$\int \frac{4x^2}{(\sqrt{1-9x^2})^3} dx$$

Solusi & Rubrik Penilaian:

Tahap 1 (Substitusi Trigonometri):

Gunakan pemisalan $3x = \sin \theta \implies x = \frac{1}{3} \sin \theta$.

[5 poin]

Turunan dari x adalah $dx = \frac{1}{3} \cos \theta d\theta$, dan akar kuadrat menjadi $\sqrt{1 - 9x^2} = \cos \theta$.

[5 poin]

Tahap 2 (Substitusi ke Integrand):

Substitusikan seluruh komponen ke dalam integral:

$$\int \frac{4 \left(\frac{1}{9} \sin^2 \theta \right)}{\cos^3 \theta} \cdot \frac{1}{3} \cos \theta d\theta = \frac{4}{27} \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{4}{27} \int \tan^2 \theta d\theta \text{ [10 poin]}$$

Tahap 3 (Pengintegralan):

Gunakan identitas trigono $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$:

$$\frac{4}{27} \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \frac{4}{27} (\tan \theta - \theta) + C \text{ [5 poin]}$$

Tahap 4 (Kembalikan ke Variabel x):

Berdasarkan segitiga siku-siku dengan sisi depan $3x$, miring 1, dan samping $\sqrt{1 - 9x^2}$:

$$\tan \theta = \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} \quad \text{dan} \quad \theta = \arcsin(3x) \text{ [10 poin]}$$

Diperoleh hasil akhir:

$$= \frac{4}{27} \left(\frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}} - \arcsin(3x) \right) + C = \frac{4x}{9\sqrt{1 - 9x^2}} - \frac{4}{27} \arcsin(3x) + C$$