

KUIS 2 KALKULUS 1 (SP 2026)

Materi: Limit dan Turunan • Kode Soal: A

1. Soal (30 poin): Buktikanlah limit berikut dengan menggunakan definisi formal limit:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$$

Solusi & Rubrik Penilaian:

Definisi formal limit menyatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dalam kasus ini, kita memiliki $c = 2$, $f(x) = 2x - 1$, dan $L = 3$.

[5 poin]

Analisis Pendahuluan (Mencari δ):

Kita ingin menemukan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka:

$$|(2x - 1) - 3| < \epsilon$$

Sederhanakan bentuk di dalam tanda mutlak sebelah kanan:

$$|2x - 4| < \epsilon \implies 2|x - 2| < \epsilon \implies |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa kita dapat memilih $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

[10 poin]

Bukti Formal:

Diberikan sembarang $\epsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ (jelas bahwa $\delta > 0$ karena $\epsilon > 0$).

[5 poin]

Jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka kita peroleh:

$$|(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2| < 2\delta = 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

Dengan demikian, terbukti bahwa jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$.

Berdasarkan definisi formal limit, terbukti secara sah bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.

[10 poin]

Catatan Kesalahan Umum & Pengurangan Poin (Negative Path):

- **Tanpa Bukti Formal:** Mahasiswa hanya melakukan analisis pendahuluan untuk mencari δ dan langsung berhenti tanpa menulis langkah bukti formalnya [10 poin]
- **Definisi/Implikasi Terbalik:** Mahasiswa menulis arah implikasi terbalik (misalnya menulis: "jika $|f(x) - L| < \epsilon$ maka $0 < |x - c| < \delta$ " atau memulai bukti formal dari $|f(x) - L| < \epsilon$ lalu menyimpulkan $|x - c| < \delta$) [5 poin]
- **Kesalahan Aljabar/Tanda:** Salah melakukan penyederhanaan aljabar di dalam tanda mutlak [-5 poin]

2. Soal (30 poin): Hitunglah limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x \right)$$

Solusi & Rubrik Penilaian:

a) **Analisis bentuk limit dan perkalian sekawan (conjugate):**

Substitusi langsung nilai limit menghasilkan bentuk tak tentu $\infty - \infty$.

Untuk menyelesaikannya, kalikan fungsi tersebut dengan bentuk sekawannya:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x}$$

[10 poin]

b) **Menyederhanakan pembilang:**

Menggunakan rumus $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, kita peroleh:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 6x + 5) - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{x^2 + 6x + 5} + x}$$

[5 poin]

c) **Membagi dengan variabel pangkat tertinggi:**

Pangkat tertinggi pada pembilang adalah x , dan pangkat tertinggi pada penyebut secara efektif juga x (karena $\sqrt{x^2} = x$ untuk $x > 0$). Bagi pembilang dan penyebut dengan x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} + \frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{5}{x^2} + \frac{x}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + 1}}$$

[10 poin]

d) **Evaluasi nilai limit:**

Karena $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$ untuk sembarang konstanta c dan $n > 0$, maka:

$$\frac{6 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{2} = 3$$

[5 poin]

Catatan Kesalahan Umum & Pengurangan Poin (Negative Path):

- **Tanpa Analisis Bentuk Tak Tentu:** Langsung mengalikan sekawan tanpa menunjukkan atau menyebutkan bahwa limit tersebut bertipe $\infty - \infty$ [-5 poin]
- **Kesalahan Perkalian Sekawan:** Salah melakukan perkalian bentuk sekawan (misal tanda di dalam akar ikut berubah menjadi negatif, atau salah menerapkan rumus selisih kuadrat) [-10 poin]
- **Kesalahan Pembagian Akar:** Salah membagi variabel di dalam akar (misalnya di dalam akar dibagi dengan x , bukan dengan x^2) [-10 poin]
- **Kesalahan Evaluasi Akhir:** Salah melakukan perhitungan aritmetika pada hasil akhir limit [-3 poin]

3. **Soal (35 poin):** Gunakan definisi turunan untuk mencari turunan fungsi berikut!

$$f(x) = 3(x - 1)^2 - x$$

Solusi & Rubrik Penilaian:

a) **Menuliskan definisi turunan:**

Turunan dari $f(x)$ didefinisikan sebagai:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[5 poin]

b) **Menyederhanakan fungsi $f(x)$ dan menentukan $f(x + h)$:**

Ekspansi dari fungsi $f(x)$:

$$f(x) = 3(x^2 - 2x + 1) - x = 3x^2 - 7x + 3$$

[5 poin]

Tentukan nilai $f(x + h)$:

$$f(x + h) = 3(x + h)^2 - 7(x + h) + 3 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 7x - 7h + 3$$

[5 poin]

c) **Substitusi ke rumus definisi turunan dan penyederhanaan aljabar:**

Masukkan nilai $f(x + h)$ dan $f(x)$ ke dalam definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - 7x - 7h + 3) - (3x^2 - 7x + 3)}{h}$$

Sederhanakan pembilangnya:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 7h}{h}$$

[10 poin]

Faktorkan suku h dari pembilang:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h - 7)}{h}$$

Karena $h \rightarrow 0$, maka $h \neq 0$, sehingga kita dapat mengeliminasi (membagi) h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 7)$$

[5 poin]

d) **Evaluasi nilai limit untuk mendapatkan turunan:**

Substitusikan $h = 0$ ke dalam limit:

$$f'(x) = 6x + 0 - 7 = 6x - 7$$

[5 poin]

Catatan Kesalahan Umum & Pengurangan Poin (Negative Path):

- **Hilangnya Notasi Limit:** Mahasiswa tidak menuliskan operator $\lim_{h \rightarrow 0}$ pada langkah-langkah aljabar perantara sebelum substitusi akhir dilakukan [5 poin]
- **Kesalahan Ekspansi Aljabar:** Salah mengekspansikan $(x + h)^2$ (misalnya menulis $x^2 + h^2$ tanpa suku $2xh$) atau salah mendistribusikan tanda negatif [-10 poin]
- **Substitusi Ilegal Prematur:** Langsung memasukkan nilai $h = 0$ ke rumus awal sebelum h pada penyebut dieliminasi (sehingga menghasilkan pembagian dengan nol secara tidak sah) [-10 poin]
- **Turunan Langsung Tanpa Definisi:** Menjawab menggunakan rumus turunan praktis (aturan rantai/pangkat) tanpa menggunakan limit definisi turunan [-30 poin]